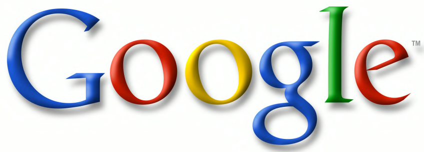


FESTSKRIFTER

UDGIVNE AF

DET MATHEMATISK-NATURVIDENSKABELIGE FAKULTET

VED

KJØBENHAVNS UNIVERSITET

I ANLEDNING AF

UNIVERSITETETS FIREHUNDREDAARSFEST

JUNI 1879.



KJØBENHAVN.

GYLDENDALSKE BOGHANDELS FORLAG (F. HEGEL & SØN).

TRYKT HOS UNIVERSITETSBOGTRYKKER J. H. SCHULTZ.

1879.

JNDHOLD.

DEN ELASTISKE KURVE

OG

DENS ANVENDELSE I BÖJNINGSTHEORIEN.

AF

ADOLPH STEEN.

Det er et enkelt Punkt i Böjningstheorien, som har foranlediget denne Undersøgelse. Det er nemlig ingenlunde klart, hvorvidt et smalt Prisme, som böjes ved et Tryk, i Virkeligheden kan indtage de i Theorien fundne Stillinger med flere Punkter i Axen, naar Understøtningernes Antal i denne er indskrænket til et eller to. Ved første Öjekast synes Spörgsmaalet at maatte henvises til Teknikernes Besvarelse, men det maa dog først være sikkert, at Theorien ved Problemets Behandling intet har bidraget til Uklarheden. Dette synes ikke saa afgjort, naar man ser hen til to Omstændigheder deri. Først indføres tidligere end fornødent en Tilnærmelse i Differentialligningen for den elastiske Kurve, som tilmed gjerne kun behandles for enkelte simplere Tilfælde. Dernæst sker ingen fuldstændig Bestemmelse af de konstanter, Ligningen medfører, idet der slet intet foretages for at bestemme netop den, der i ovennævnte Henseende er afgjörende.

Det synes saaledes ogsaa i theoretisk Henseende at have sin Interesse at faa Manglerne i Løsningen rettede, og det ikke blot for det her foreliggende Tilfældes Skyld, men fordi der for andre lignende Undersøgelser turde være noget at vinde, ogsaa for Praxis, ved nöjagtigere Methoder.

Hovedopgaven er her altsaa Problemets almindelige Behandling og den fuldstændige Bestemmelse af alle Störrelser, som det maatte være nødvendigt at indføre. Men først foretages det simpleste Tilfælde, og dernæst forsøges en almindelig Theori, hvis fuldstændige Gjennemførelse støder paa större Vanskelighed.

1. Et smalt Prisme er stillet med sin Axe lodret og underkastet Tryk af en given Kraft virkende lodret nedad i dets øverste Endepunkt, saaledes at det böjes derved, medens der kan ses bort fra den ringe Sammentrykning, det maatte lide. Prismets Endepunkter antages at maatte blive i Lodlinien, dog saaledes, at Endernes frie Drejning eller Böjning ikke er hindret, det er, Prismet maa ikke være indspændt. Alle andre Punkter antages at kunne vige frit ud til Siden. Man skal da finde Figuren af det böjede Prisme, som i sin oprindelige Stilling betragtes som en ret Linie, Prismets Axe.

Axen antages at falde i Abscisseaxen og dens nederste Punkt at være Begyndelsespunkt, det øverste er altsaa $(l, 0)$. Man skal da have Ordinaten y og Figurens Krumningsradius ϱ omvendt proportionale, og deres konstante Produkt skal være lig $-\frac{EI}{R} = -c^2$, hvor E er Elasticitetskoefficienten, I Inertimomentet af Prismets Gjennemsnit med Hensyn til en Axe igjen dets Tyngdepunkt vinkelret paa den Plan, hvori Böjningen sker. Rimeligvis sker den saaledes, at dette er Snittets mindste Inertimoment.

2. Man har altsaa

$$\varrho y + c^2 = 0$$

eller

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{y}{c^2}. \tag{1}$$

Sættes $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{pdp}{dy}$, faar man

$$\frac{pdp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{ydy}{c^2},$$

altsaa

$$C - \frac{1}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{y^2}{2c^2}.$$

Heraf ses, at de samme Værdier af y^2 give de samme Værdier af $p^2 = tg^2\varphi$, altsaa af Vinklen φ imellem Tangenten

og Abscisseaxen, om end maaske til modsatte Sider af denne. Men nu har man

$$\cos\varphi = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}},$$

som er positiv, naar φ antages liggende imellem $-\frac{\pi}{2}$ og $+\frac{\pi}{2}$ til den positive Side af Abscisseaxen. Følgelig kan konstanten C udtrykkes ved $\cos\lambda$, idet $\pm\lambda$ er Vinklen, som Tangenterne til Endepunkterne af det böjede Prisme danne med Abscisseaxen. Man faar da

$$\cos\lambda - \frac{1}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{y^2}{2c^2},$$

altsaa

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{4c^4 - (2c^2\cos\lambda + y^2)^2}}{2c^2\cos\lambda + y^2}. \tag{2}$$

Heraf ses, at man altid maa have

$$2c^2 > 2c^2\cos\lambda + y^2 > -2c^2.$$

Den sidste af disse Grænser er af sig selv iagttaget, medens den første kræver

$$2c\sin\frac{\lambda}{2} > y > -2c\sin\frac{\lambda}{2}. \tag{3}$$

Dette bestemmer de störste Fjernelser fra Axens oprindelige Stilling, som noget Punkt kan gjöre til nogen af Siderne, men ved den ubekjendte λ. Til disse Grænser for y svarer $\frac{dy}{dx} = 0$, medens y ved at skifte Tegn igjennem 0 i Følge (1) vil lade $\frac{d^2y}{dx^2}$ ligeledes skifte Tegn, saaledes at Punkterne $(0,0)$ og $(l,0)$ med $\frac{dy}{dx} = \pm tg\lambda$ maa være Vendepunkter i Kurven. Vælges $y$axen positiv til den Side, henad hvilken Prismets nederste Partikler ere böjede, saa er for det nederste Punkt $\frac{dy}{dx} = +tg\lambda$.

3. Endvidere faas

$$x = \int_0^y \frac{2c^2\cos\lambda + y^2}{\sqrt{4c^4 - (2c^2\cos\lambda + y^2)^2}}\,dy; \tag{4}$$

men det samme Integral bestemmer ogsaa $l - x$, da Integrationen ogsaa kan udføres imellem Grænserne y svarende til x og 0 svarende til l, hvorved faas $l - x$ udtrykt ved Integralet fra y til 0. Kurven er symetrisk med Hensyn til de Ordinater, som ere Maximum eller Minimum. Som henhørende til de elliptiske Integraler maa ogsaa (4) kunne faa forskjellige Værdier for det samme y; derfor er det ogsaa muligt, at endnu flere x kunne svare til de samme y. Men i Spörgsmaalet om Prismets Böjning har man kun at gjöre med dem, der ligge imellem 0 og l.

4. Integralet (4) kan bringes paa Normalformen for det første elliptiske Integral paa den Maade, som er angivet i min Afhandling i Videnskabernes Selskabs Skrifter, math. naturvidsk. Afd. 5 R. 8. B. Side 185 (se navnlig Art. 12—14). Men her vil Nævnerens Opløsning i Faktorer ogsaa umiddelbart vise, at man kan bruge Substitutionen

$$y^2 = 4c^2 \sin^2\frac{\lambda}{2} \cos^2\theta. \tag{5}$$

Derved faas

$$2c^2 - 2c^2 \cos\lambda - y^2 = 4c^2 \sin^2\frac{\lambda}{2} \sin^2\theta,$$

$$2c^2 + 2c^2 \cos\lambda + y^2 = 4c^2 \left(\cos^2\frac{\lambda}{2} + \sin^2\frac{\lambda}{2} \cos^2\theta\right),$$

$$y\,dy = -4c^2 \sin^2\frac{\lambda}{2} \cos\theta \sin\theta\, d\theta,$$

saa at altsaa y aftager, naar θ voxer fra 0 til $\frac{\pi}{2}$, og omvendt; men man maa, for at y kan begynde med at være positiv, som ovenfor forudsat, antage $y = 0$ for $\theta = \frac{\pi}{2}$, saa at de følgende voxende Værdier for x faas for θ aftagende fra $\frac{\pi}{2}$.

Man faar altsaa

$$x = c\int_\theta^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\lambda + 2\sin^2\frac{\lambda}{2}\cos^2\theta}{\sqrt{\cos^2\frac{\lambda}{2} + \sin^2\frac{\lambda}{2}\cos^2\theta}}\, d\theta$$

eller udtrykt ved $\sin\frac{\lambda}{2}$

$$x = c\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-2\sin^2\frac{\lambda}{2}\sin^2\theta}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\lambda}{2}\sin^2\theta}}\,d\theta. \tag{6}$$

Med den bekjendte Betegnelse

$$\Delta(\theta) = \sqrt{1-\sin^2\frac{\lambda}{2}\sin^2\theta}$$

og en let Ændring af Tælleren bliver (6)

$$x = c\left[2\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}}\Delta(\theta)\,d\theta - \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\Delta(\theta)}\right], \tag{7}$$

altsaa med Legendres Betegnelser for disse Funktioner og deres særlige saakaldte komplete Værdier

$$x = c\,[2E' - 2E(\theta) - F' + F(\theta)]\left(\text{mod} \sin\frac{\lambda}{2}\right). \tag{8}$$

(7) eller (8) i Forbindelse med (5) bestemme den ved Böjningen frembragte Figur, dog bestandig afhængig af λ.

Sættes

$$\int_0^{\theta}\frac{d\theta}{\Delta(\theta)} = u$$

og med Jacobi

$$\theta = \text{am}\,.\,u,$$

saa bliver

$$y = 2b\sin\frac{\lambda}{2}\cos\,\text{am}\,.\,u$$

udrustet med den dobbelte Periodicitet, som tilkommer de elliptiske Funktioner. Dog kommer her kun den reelle Periode i Betragtning.

5. Af

$$\frac{dx}{d\theta} = -c\,\frac{1-2\sin^2\frac{\lambda}{2}\sin^2\theta}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\lambda}{2}\sin^2\theta}},$$

$$\frac{dy}{d\theta} = -2c\sin\frac{\lambda}{2}\sin\theta$$

finder man Buen regnet fra Begyndelsespunktet af

$$\frac{ds}{d\theta} = -\frac{c}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\lambda}{2}\sin^2\theta}}.$$

Medens θ ved at aftage fra $\frac{\pi}{2}$, som ovenfor berørt, lader y skiftevis voxe og aftage, naar θ passerer 0, $-\pi$, -2π, -3π...., saa ville derimod x og s uafbrudt voxe, efterhaanden som θ aftager.

Man finder altsaa

$$s = c\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\varDelta(\theta)} = c\,(F' - F(\theta))\left(\text{mod }\sin\frac{\lambda}{2}\right) \tag{9}$$

eller

$$s = c\,(F' - u)$$

og deraf igjen

$$\theta = \text{am}\left(F' - \frac{s}{c}\right) = \text{coam}.\frac{s}{c}.$$

Denne Ligning viser, at

for	$\theta = \frac{\pi}{2}$,	0,	$-\frac{\pi}{2}$,	$-\pi$ ....
bliver	$s = 0$,	cF',	$2cF'$,	$3cF'$ ....
og	$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{\cos\frac{\lambda}{2}}{s}$,	$-\frac{1}{c}$,	$-\frac{\cos\frac{\lambda}{2}}{s}$,	$-\frac{1}{c}$ ....

θ kan derfor afsættes som Ordinat til en Kurve, der skærer den rette Linie

$$y = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{s}{cF'}\right)$$

i de til Abscisserne $s = pcF'$ for hele p svarende Punkter og i øvrigt bugter sig paa begge Sider deraf, tilmed saaledes, at den i Punktet $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ gaar nedenfra op over den rette Linie.

Ligeledes vil man

for	$\theta = \frac{\pi}{2}$,	0,	$-\frac{\pi}{2}$,	$-\pi$ ....
finde	$x = 0$,	$c(2E' - F')$,	$2c(2E' - F')$,	$3c(2E' - F')$ ....

Differensen imellem Buen og Abscissen angiver, hvor stort et Stykke Prismets Punkter ere sænkede dybere ned ved Böjningen, nemlig

$$s - x = 2c\left[\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\varDelta(\theta)} - \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}}\varDelta(\theta)d\theta\right] \quad \left(\text{mod}\sin\frac{\lambda}{2}\right)$$

$$= 2c\,[F' - F(\theta) - E' + E(\theta)],$$

bestandig voxende, naar θ aftager.

6. Tangentens Vinkel med Abscisseaxen er bestemt ved en af Formlerne

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{dx}{ds} = 1 - 2\sin^2\frac{\lambda}{2}\sin^2\theta, \\ \operatorname{tg}\varphi &= \frac{dy}{dx} = \frac{2\sin\frac{\lambda}{2}\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\frac{\lambda}{2}\sin^2\theta}}{1-2\sin^2\frac{\lambda}{2}\sin^2\theta}, \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

hvor ogsaa $\sin\theta$ kan erstattes ved $\sin\text{coam}\,.\,\frac{s}{c}$. Periodiciteten af φ fremgaar saaledes heraf, efter den Maade, hvorpaa φ regnes, at hver Gang θ bliver et ulige helt Multiplum af $\frac{\pi}{2}$, faar man $\varphi = \lambda$ eller $\varphi = -\lambda$, nemlig $\theta = -\frac{(4p-1)\pi}{2}$ giver $\varphi = \lambda$, $\theta = -\frac{(4p+1)\pi}{2}$ derimod $\varphi = -\lambda$. I de første Punkter gaar y fra negativt igjennem nul til positivt, i de sidste omvendt.

7. En fuldstændigere Oversigt over alle Störrelsernes Variation faas ved en tabellarisk Opstilling af deres Værdier for de mærkelige Punkter i den ved Böjningen opstaaede Kurve imellem to ved 2π forskjellige Værdier af θ.

$\theta : \frac{\pi}{2}$	$-(4p-1)$	$-4p$	$-(4p+1)$	$-(4p+2)$
$x : c\,[2E'-F']$ $s : cF'$ $(s-x) : 2c\,[F'-E']$	$4p$	$4p+1$	$4p+2$	$4p+3$
y	0	$(-1)^{2p} c \sin\frac{\lambda}{2}$	0	$(-1)^{2p+1} c \sin\frac{\lambda}{2}$
φ	λ	0	$-\lambda$	0
$\frac{d^2y}{dx^2}$	0	$+$	0	$-$

Kurvens Projektion paa Abscisseaxen og dens Bue ere, som Tavlen viser, delte i ligestore Stykker, henholdsvis $c[2E' - F']$ og cF' i de Punkter, hvor $y = 0$ og $y = \pm c \sin\frac{\lambda}{2}$, saa at der saavel imellem to paa hinanden følgende Vendepunkter, som imellem et Maximumspunkt og det paafølgende Minimumspunkt ligger den dobbelte Længde, samt henholdsvis en enkelt eller to halve Bugter, den første paa den ene Side af Abscisseaxen, de to sidste hver paa sin Side.

Da den givne Længde l af Prismet nu er böjet i en Kurve, der ligger imellem to Punkter i Abscisseaxen, saa maa man have

$$l = 4pcF' \text{ eller } l = (4p+2)\,cF',$$

følgelig den tilsvarende Abscisse

$$x = 4pc\,(2E' - F') \text{ eller } x = (4p+2)\,c\,(2E' - F'),$$

saa at

$$\frac{x}{l} = 2\frac{E'}{F'} - 1.$$

8. Af de foregaaende Formler kan dernæst p bestemmes. Man har enten $\varphi = \lambda$ og $2p = \frac{l}{2cF'}$ eller $\varphi = -\lambda$ og $2p + 1 = \frac{l}{2cF'}$, altsaa $\varphi = \pm\lambda$, eftersom $m = \frac{l}{2cF'}$ er et lige eller et ulige helt Tal.

Da man nu har

$$1 > \sin^2 \frac{\lambda}{2} > 0,$$

saa er ogsaa

$$\infty > F'\left(\sin \frac{\lambda}{2}\right) > \frac{\pi}{2}$$

og følgelig

$$0 < m < \frac{l}{\pi c}.$$

Der maa altsaa gives et helt Tal mindre end $\frac{l}{\pi c}$, hvis Böjningen skal være mulig. Altsaa hvis

$$\frac{l}{\pi c} = \frac{l}{\pi} \sqrt{\frac{R}{EI}} < 1,$$

kan Prismet ikke blive böjet. Heraf udledes den laveste Grænse for de Tryk, som kunne böje Prismet, nemlig

$$R = \frac{\pi^2 EI}{l^2}, \tag{11}$$

hvor I er det mindste Inertimoment af Snittets Areal med Hensyn til nogen Axe igjennem Tyngdepunktet. De nærmest derefter følgende Tryk kunne kun give en enkelt Bugt til y'ernes positive Side, vinkelret paa det mindste Inertimoments Axe.

Et Tryk, som skulde kunne give Böjning i m Bugter, fordelte skiftevis til modsatte Sider af Prismets oprindelige Axe, maatte være

$$R = \frac{m^2 \pi^2 EI}{l^2},$$

altsaa proportionalt med Kvadratet paa Bugternes Antal m. Til Frembringelse af flere Bugter vilde altsaa behøves en stærk Tilvæxt i Tryk.

9. Men i Virkeligheden vil m vanskelig komme til at overskride 1, uden for saa store Tryk, som ganske bryde Prismet, idet de overskride Grænsen for det Tryk, man kan byde Materialet, eller for saa store Længder af Prismet, som der ikke er Anvendelse for. Betegnes nemlig den Belastning, Materialet

kan taale for hver Kvadrattommes Gjennemsnit, naar det trykkes, ved r, saa skal altsaa R være mindre end rA, naar A betyder Arealet i Kvadrattommer. Man skal altsaa have

$$\frac{\pi^2 EI}{l^2} < rA.$$

Sættes dernæst $I = Ak^2$, saa at k er Inertimomentets Omdrejningsradius (ogsaa kaldet Arm), faar man

$$\frac{\pi^2 Ek^2}{l^2} < r$$

eller

$$\frac{l}{k} > \pi \sqrt{\frac{E}{r}},$$

hvilket er nødvendig Betingelse for Böjning i en enkelt Bugt.

Men denne laveste Grænse for Forholdet imellem Længden og Inertimomentets Omdrejningsradius er i de fleste Tilfælde temmelig stor, saa at man vanskelig kan træffe praktisk anvendelige Störrelser, der gjöre m större end 1. Dette ses af nedenstaaende Tavle.

Materiale.	E	r	$\pi \sqrt{\frac{E}{r}}$
Smedejern	28 000 000	9 000	$\pi\sqrt{3111} = 175,2$
Støbejern	13 500 000	10 000	$\pi\sqrt{1350} = 115,4$
Fyr	2 400 000	800	$\pi\sqrt{3000} = 172,1$
Eg	1 620 000	800	$\pi\sqrt{2025} = 141,4$

I Almindelighed vil k indskrænke sig til nogle faa Tommers Længde, i det mindste for de to første Materialier, saa at der først for en meget stor Længde l kan blive Tale om Böjning, og da kun saaledes, at Prismet slaar en enkelt Bugt.

Antog man

$$R = \frac{m^2 \pi^2 EI}{l^2} < rA,$$

fik man

$$\frac{l}{k} = m\pi \sqrt{\frac{E}{r}},$$

saa at Længdens Forhold til Inertimomentets Om-

drejningsradius maa være proportionalt med Antallet af Bugter, Prismet skulde slaa.

10. I de foregaaende Formler indgaar endnu den ubekjendte Vinkel λ, som Tangenterne til Kurvens Skæringspunkter med Axen danne til den ene eller den anden Side. Den varierer for samme Materiale og for samme Dimensioner deraf med Trykkets Störrelse. Med den i (11) fundne laveste Grænse for R indsat i

$$l = 2cF'$$

faar man

$$F'\left(\sin\frac{\lambda}{2}\right) = \frac{l}{2c} = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{R}{EI}}.$$

Naar F' er beregnet heraf, findes de tilsvarende Værdier af $\frac{\lambda}{2}$ ved de Tavler, som tjene til Beregning af de til Værdier af det komplete elliptiske Integral af første Art svarende Vinkler, hvis sinus er Modulus.

11. Anvendt paa en Smedejerns Stiver med en Cirkelring til Gjennemsnit, hvis yderste Diameter er $17\frac{1}{2}''$ og som har $\frac{7}{16}''$ Metaltykkelse, giver det udviklede følgende Resultater.

Arealet:

$$A = \pi\,(8\tfrac{1}{4}^2 - 7\tfrac{13}{16}^2) = 22{,}08\,\square'', \quad \log A = 1{,}34394.$$

Omdrejningsradius:

$$k^2 = \tfrac{1}{4}\,(8\tfrac{1}{4}^2 + 7\tfrac{13}{16}^2) = 32{,}27'', \quad \log k^2 = 1{,}50880,$$

$$k = 5{,}68''.$$

Længden mindst:

$$l = 175{,}2\sqrt{32{,}27''} = 995{,}2'', \quad \log l = 2{,}99793.$$

Altsaa, for at Prismet skulde böjes ved et Tryk ikke over Grænsen for Belastning ved Sammentrykning,

$$9\,000 \,.\, 22{,}08 ℔ = \text{c. } 198\,720 ℔,$$

kræves en Længde af c. 83'.

Vælger man dernæst större Værdier for R, saa vil λ kunne findes for Ex. af Legendres Tavler i Exercices de Calcul Integral, Paris 1811, Side 118 eller i Traité des Fonctions elliptiques t. II, Paris 1826, Side 222 følg. Saaledes vil $R = 200\,000$ ℔ give

$$\log F' = 0{,}19746,\ \frac{\lambda}{2} = 6{,}4^\circ;$$

flere Exempler findes i følgende Tavle:

R	$\log F'$	$\frac{\lambda}{2}$
200 000	0,19746	6,4°
199 000	0,19637	2,8°
198 800	0,19617	1,2°
198 775	0,19614	0,7°

12. Ved Opgavens almindelige Behandling bevares kun den lodrette Stilling af Prismets Axe, medens de øvrige Bestemmelser til Dels holdes aabne til Lettelse for Regningen. Der antages at være et eller to Punkter i Axen faste paa en eller anden i de enkelte Tilfælde nærmere bestemt Maade. Den igjennem Linien og Kraften gaaende Plan, i hvilken Prismets Axe antages at blive efter Böjningen, gjöres til Koordinatplan med Abscisseaxen lodret opad. Prismets nederste Endepunkt antages altid at være fast, men det andet faste Punkt, for saa vidt der er et saadant, bestemmes foreløbig ikke. Kraftens Angrebspunkt er det andet Endepunkt (a, b); dens Retning saaledes, at den i ethvert Tilfælde virker til Formindskelse af Abscissen a, medens dens Virkning paa Ordinaten foreløbig lades ubestemt. Man kan da antage dens Komposanter at være,

efter $x$axen: $P = -R \cos \omega$,

efter $y$axen: $Q = \pm R \sin \omega$,

saa at ω bliver den spidse Vinkel imellem Kraften og $x$axen imod y'ernes positive Retning. De øvrige Betegnelser i det foregaaende beholdes.

Den bekjendte Differentialligning for den elastiske Kurve bliver da (jfr. Poisson: Traité de Méc. sec. édit. t I. Side 606)

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} + [Q(a-x) + P(b-y)]\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} = 0. \qquad (12)$$

Integrationen heraf sker bedst ved at indføre

$$\varrho = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{ds}{d\varphi},$$

hvorved faas

$$EI\frac{d\varphi}{ds} + [Q(a-x) + P(b-y)] = 0, \tag{13}$$

følgelig

$$EI\frac{d^2\varphi}{ds^2} = Q\frac{dx}{ds} + P\frac{dy}{ds} = Q\cos\varphi + P\sin\varphi.$$

Integration heraf giver

$$EI\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = C + 2(Q\sin\varphi - P\cos\varphi).$$

Den arbitrære konstant C vil være Differensen imellem Værdier af $\frac{EI}{\varrho^2}$ og $2(Q\sin\varphi - P\cos\varphi)$ for et vist Punkt af Kurven. Men efter Böjningen tör Linien altid antages at have et eller andet uböjet Element, hvori altsaa Krumningen er $\frac{d\varphi}{ds} = 0$ eller $\varrho = \infty$. Dette har vist sig i det foregaaende specielle Tilfælde, ligesom ogsaa andre bekjendte Undersøgelser have givet et eller flere Vendepunkter, hvor $\varrho = \infty$. Det synes ogsaa næsten umiddelbart indlysende, at en ikke indspændt Ende af et homogent overalt lige tykt Prisme ikke vil böje sig, medens derimod det indspændte faar Vendepunkt et andet Sted.

Antages nu til $\varrho = \infty$ svarende $\varphi = \lambda$, saa faas

$$EI\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 2Q(\sin\varphi - \sin\lambda) - 2P(\cos\varphi - \cos\lambda)$$

eller, efter Indførelse af R, ω og c, samt Division med R,

$$c\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 2(\cos(\varphi \mp \omega) - \cos(\lambda \mp \omega)). \tag{14}$$

Denne Ligning kræver

$$\cos(\varphi \mp \omega) > \cos(\lambda \mp \omega),$$

altsaa

$$\lambda \mp \omega > \varphi \mp \omega > -(\lambda \mp \omega),$$

hvoraf igjen følgende Grænser findes for φ,

$$\lambda > \varphi > -\lambda + 2\omega.$$

13. Regnes dernæst Buen fra det samme Punkt, hvor $\varphi = \lambda$, $\varrho = \infty$, men voxende, naar φ aftager fra sin höjeste Grænse λ, saa faas

$$s = c\int_{\varphi}^{\lambda} \frac{d\varphi}{\sqrt{2\cos(\varphi \mp \omega) - 2\cos(\lambda \mp \omega)}} = \frac{c}{2}\int_{\varphi}^{\lambda} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\lambda \mp \omega}{2} - \sin^2\frac{\varphi \mp \omega}{2}}}.$$

Ved Substitutionen

$$\sin\frac{\varphi \mp \omega}{2} = \sin\frac{\lambda \mp \omega}{2}\sin\theta$$

ændres dette til det elliptiske Integral af første Art. Da man har

$$\sin\frac{\lambda \mp \omega}{2} > \sin\frac{\varphi \mp \omega}{2} > -\sin\frac{\lambda \mp \omega}{2},$$

saa bliver

$$1 > \sin\theta > -1,$$

samt θ aftagende med φ. Man kan altsaa lade θ aftage fra $\frac{\pi}{2}$ af. Man faar da

$$s = c\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\lambda \mp \omega}{2}\sin^2\theta}}$$

eller

$$s = c\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\Delta(\theta)} = c\,(F' - F(\theta)) \qquad \left(\text{mod.} \sin\frac{\lambda \mp \omega}{2}\right).$$

Aftager θ fra $\frac{\pi}{2}$ til 0 og samtidig dermed φ fra λ til $\pm\omega$, altsaa indtil Tangenten bliver parallel med Kraftens Retning, bliver

$$s = c\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\Delta(\theta)} = cF'\left(\sin\frac{\lambda \mp \omega}{2}\right) \tag{15}$$

o. s. v. Overhovedet gjælde de i 5 for det specielle Tilfælde

fundne Resultater angaaende s og $\frac{d\theta}{ds}$ ogsaa i Almindelighed med den Forandring, at $\lambda \mp \omega$ maa sættes istedenfor λ.

14. Fremdeles haves

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{d\varphi} = \cos\varphi \frac{ds}{d\varphi},$$
$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{d\varphi} = \sin\varphi \frac{ds}{d\varphi},$$

følgelig

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{c}{\sqrt{2}}\int_{\varphi}^{\lambda}\frac{\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{\cos(\varphi\mp\omega)-\cos(\lambda\mp\omega)}}, \\ y &= \frac{c}{\sqrt{2}}\int_{\varphi}^{\lambda}\frac{\sin\varphi d\varphi}{\sqrt{\cos(\varphi\mp\omega)-\cos(\lambda\mp\omega)}}, \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

idet $x = 0$ og $y = 0$ svare til $\varphi = \lambda$, $\varrho = \infty$, $s = 0$, saa at Koordinaternes Begyndelsespunkt vælges i et Punkt af Kurven, hvor dens Krumning er nul. Tillige vælges den positive Retning af $y$axen til den Side, henimod hvilken den nederste Del af Prismet er böjet.

Da $\frac{dx}{ds}$ beholder samme Fortegn som $\frac{d\varphi}{ds}$, saa længe $\cos\varphi$ er positiv, altsaa φ imellem $-\frac{\pi}{2}$ og $+\frac{\pi}{2}$, saa voxer x uafbrudt. Først i det vistnok sjældne Tilfælde, at $\cos\varphi$ bliver negativ, sker der heri en Forandring. Derimod maa $\frac{dy}{ds}$ skifte Fortegn med $\sin\varphi$, altsaa naar φ passerer nul; y bliver derfor skiftevis voxende og aftagende, og man faar Maximum, naar $\sin\varphi$ skifter fra + til —, Minimum for den omvendte Overgang.

For $\varphi = -\lambda \pm 2\omega$ ændres Integralerne (16), idet det første indeholder en lige, det sidste en ulige Funktion af φ, til

$$x = c\sqrt{2}\int_{0}^{\lambda}\frac{\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{\cos(\varphi\mp\omega)-\cos(\lambda\mp\omega)}} + \frac{c}{\sqrt{2}}\int_{-\lambda\pm 2\omega}^{-\lambda}\frac{\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{\cos(\varphi\mp\omega)-\cos(\lambda\mp\omega)}}.$$

$$y = \frac{c}{\sqrt{2}}\int_{-\lambda\pm 2\omega}^{-\lambda}\frac{\sin\varphi d\varphi}{\sqrt{\cos(\varphi\mp\omega)-\cos(\lambda\mp\omega)}},$$

saa at Kurven i det Tilfælde, hvor Kraftens Komposant efter $y$axen virker til Formindskelse af b, nødvendig maa skære Abscisseaxen.

Istedenfor de to Integraler (16) kan man tage

$$x \cos \omega \pm y \sin \omega = \frac{c}{\sqrt{2}} \int_{\varphi}^{\lambda} \frac{\cos(\varphi \mp \omega)\, d\varphi}{\sqrt{\cos(\varphi \mp \omega) - \cos(\lambda \mp \omega)}},$$

$$x \sin \omega \mp y \cos \omega = \mp \frac{c}{\sqrt{2}} \int_{\varphi}^{\lambda} \frac{\sin(\varphi \mp \omega)\, d\varphi}{\sqrt{\cos(\varphi \mp \omega) - \cos(\lambda \mp \omega)}},$$

som begge kunne udtrykkes ved bekjendte Funktioner. Det første bliver nemlig først til

$$x \cos \omega \pm y \sin \omega = \frac{c}{2} \int_{\varphi}^{\lambda} \frac{1 - 2\sin^2 \frac{\varphi \mp \omega}{2}}{\sqrt{\sin^2 \frac{\lambda \mp \omega}{2} - \sin^2 \frac{\varphi \mp \omega}{2}}}\, d\varphi$$

og dernæst med samme Substitution som ovenfor til

$$x \cos \omega \pm y \sin \omega = c \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - 2\sin^2 \frac{\lambda \mp \omega}{2} \sin^2 \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\lambda \mp \omega}{2} \sin^2 \theta}}\, d\theta,$$

medens det andet er

$$x \sin \omega \mp y \cos \omega = \mp c \sqrt{2\cos(\varphi \mp \omega) - 2\cos(\lambda \mp \omega)}.$$

Deraf dannes endelig

$$\left.\begin{aligned} x \cos \omega \pm y \sin \omega &= c\left[2\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \Delta(\theta)\, d\theta - \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\Delta(\theta)}\right] \left(\text{mod.} \sin \frac{\lambda \mp \omega}{2}\right) \\ x \sin \omega \mp y \cos \omega &= \mp 2c \sin \frac{\lambda \mp \omega}{2} \cos \theta. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Elimination af θ imellem disse Ligninger vilde give den elastiske Kurves almindelige Ligning.

Dens Punkter fremkomme ved Skæring af de to ved (17) bestemte rette Linier, af hvilke den sidste danner Vinklen $\pm \omega$ med Abscisseaxen, og den første er vinkelret derpaa.

Fremdeles viser den sidste, at alle til samme θ svarende Punkter paa Kurven ligge paa samme rette Linie under Vinklen $\pm\omega$ med Abscisseaxen. For $\theta = -\frac{2p-1}{2}\pi$ finder man, at Kurvens Vendepunkter ligge paa en ret Linie igjennem Begyndelsespunktet bestemt ved

$$x \sin\omega \mp y \cos\omega = 0.$$

Af (17) faas som Udtryk for Koordinaterne

$$x = c\left[2\cos\omega \int_\theta^{\frac{\pi}{2}} \Delta(\theta)\, d\theta - \cos\omega \int_\theta^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\Delta(\theta)} \mp 2\sin\omega \sin\frac{\lambda\mp\omega}{2}\cos\theta\right],$$

$$y = c\left[2\sin\omega \int_\theta^{\frac{\pi}{2}} \Delta(\theta)\, d\theta - \sin\omega \int_\theta^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\Delta(\theta)} \pm 2\cos\omega \sin\frac{\lambda\mp\omega}{2}\cos\theta\right].$$

For $\theta = 0$, $\varphi = \pm\omega$ faas

$$x_0 = c\left[\cos\omega\,(2E' - F') \mp 2\sin\omega\sin\frac{\lambda\mp\omega}{2}\right],$$

$$y_0 = c\left[\sin\omega\,(2E' - F') \pm 2\cos\omega\sin\frac{\lambda\mp\omega}{2}\right],$$

og naar $\varphi = 0$, altsaa $\sin\theta_0 = \mp\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\sin\frac{\lambda\mp\omega}{2}}$, faas de til Maximums- og Minimumspunkter svarende Koordinater, hvis sidste Led indeholder

$$\sin\frac{\lambda\mp\omega}{2}\cos\theta_0 = \sqrt{\sin^2\frac{\lambda\mp\omega}{2} - \sin^2\frac{\omega}{2}} = \sqrt{\sin\frac{\lambda}{2}\sin\frac{\lambda\mp 2\omega}{2}}.$$

Endelig har man i Vendepunkterne, $\theta = -\frac{(2p-1)\pi}{2}$, $\varphi = \lambda$ eller $\varphi = -\lambda \pm 2\omega$ og

$$\left.\begin{aligned} x &= 2pc\cos\omega\,[2E' - F'],\\ y &= 2pc\sin\omega\,[2E' - F'].\end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

15. Skjönt Loven for φ's Variation med θ er given ved den forhen brugte Relation, kan det dog være hensigtsmæssigt

at have trigonometriske Funktioner af φ alene givne. Man finder

$$\cos(\varphi \mp \omega) = 1 - 2\sin^2\frac{\lambda \mp \omega}{2}\sin^2\theta$$

og deraf

$$\sin(\varphi \mp \omega) = 2\sin\frac{\lambda \mp \omega}{2}\sin\theta\, \varDelta(\theta),$$

hvor $\varDelta(\theta)$ maa tages positiv, for at $\theta = \frac{\pi}{2}$ kan give $\varphi = \lambda$; $\sin(\varphi \mp \omega)$ har altsaa samme Tegn som $\sin\frac{\lambda \mp \omega}{2}$, indtil θ bliver negativ, da Tegnet bliver det modsatte.

Man faar nu

$$\cos\varphi = \cos\omega\left(1 - 2\sin^2\frac{\lambda \mp \omega}{2}\sin^2\theta\right) \mp 2\sin\omega\sin\frac{\lambda \mp \omega}{2}\sin\theta\, \varDelta(\theta),$$

$$\sin\varphi = \mp\sin\omega\left(1 - 2\sin^2\frac{\lambda \mp \omega}{2}\sin^2\theta\right) + 2\cos\omega\cos\frac{\lambda \mp \omega}{2}\sin\theta\, \varDelta(\theta).$$

Tillige fortjener at mærkes, at (14) giver

$$c\frac{d\varphi}{ds} = \mp 2\sin\frac{\lambda \mp \omega}{2}\cos\theta,$$

hvor Fortegnet maa tages saaledes, at $\frac{d\varphi}{ds}$ bliver negativ.

16. Naar $\omega = 0$, bliver ikke blot $P = -R$ og $Q = 0$, men det dobbelte Tegn, som hidrører fra R's to forskjellige Stillinger, der nu falde sammen i en Overgangsstilling, falder bort overalt. Ligningen (13) bliver til

$$c\frac{d\varphi}{ds} = b - y,$$

hvori man samtidig skal have $y = 0$ og $\frac{d\varphi}{ds} = 0$. Dertil kræves $b = 0$, saa at Abscisseaxen maa være Lodlinien igjennem det Endepunkt, hvorpaa Trykket virker, og som tillige er et Vendepunkt. Man faar en med Hensyn til Maximum af y symmetrisk Figur. Da Begyndelsespunktet ligeledes er et Vendepunkt i Lodlinien, saa indtræder dette Forhold, naar Prismets Endepunkter ere bundne til Lodlinien uden Indspænding, det vil sige saaledes, at den frie Drejning af Enderne ikke er hindret.

Men det er netop det i 1—11 behandlede Tilfælde; man vil ogsaa finde, at alle derhenhørende Formler findes af dem i 12—15, naar man gjör $\omega = 0$.

Men er Prismets nederste Ende indspændt, saa at det böjede Prismes Figur har en lodret Tangent i dette Endepunkt, altsaa $\varphi = 0$, saa ligge begge Ender ikke i samme Lodlinie. Virkningen af Trykket er at böje Prismet ud fra Lodlinien ogsaa i det øverste Endepunkt. Den nærmere Bestemmelse af Figuren beror nu paa, om noget andet Punkt af Prismet er bundet til Lodlinien eller ej.

Det simpleste Tilfælde vil være det, hvor dette ikke finder Sted. Man vil da fra det nederste Endepunkt, som kan antages svarende til det Minimum af y, som i det foregaaende Tilfælde faldt nærmest nedenfor Begyndelsespunktet, hvor $\theta = \theta_0 + \frac{\pi}{2}$, op til det øverste Vendepunkt have hele Prismets Længde, som her kaldes L. Man har altsaa

$$L = (2p + 1)\, cF',$$

saa at

$$2p + 1 = \frac{L}{cF'},$$

skal være et helt Tal, mindst 1, $p = 0$. Der kræves altsaa til Böjning mindst

$$R = \frac{\pi^2 EI}{L^2},$$

samt, for at Sønderbrydning ikke skal ske,

$$\frac{\pi^2 EI}{L^2} < rA,$$

altsaa

$$\frac{L}{k} = \pi \sqrt{\frac{E}{r}}.$$

Paa samme Maade som i 9 vil nu ses, at Materialet i Almindelighed kræver $p = 0$, altsaa Prismets Længde

$$L = cF'.$$

Dette Udtryk er netop halvt saa stort, som det, der fandtes for Længden af et Prisme, hvis Ender begge maatte blive i Lodlinien. Men følgelig maa Beregningen af λ ved

$$F'\left(\sin\frac{\lambda}{2}\right) = \frac{L}{c} = \frac{l}{2c}$$

give ganske samme Resultater som før. Naar altsaa et smalt Prisme er indspændt ved sin nederste Ende, men forresten frit, vil det ved et lodret Tryk nedad i den øverste Ende indtage en Figur, der netop er Halvdelen af den, som et dobbelt saa langt Prisme, hvis ikke indspændte Ender ere bundne til Lodlinien, faar ved det samme Tryk; men det vil være den øverste Halvdel drejet om Tangenten til Maximumspunktet og flyttet ned til Berøring med Abscisseaxen i Begyndelsespunktet.

Hvis Prismet paa lignende Maade var indspændt i et andet Punkt, foruden det nederste, saa maatte Tangenten til begge Punkter være den samme Lodlinie, altsaa i en Afstand fra Abscisseaxen lig Maximum af y. Da til samme Tid $b = 0$, altsaa Trykket virkende i et Vendepunkt, saa maa Længden af det böjede Prisme være

$$L = (4p + 1)\, cF' \text{ eller } L = (4p + 3)\, cF',$$

$p > 0$. Man vil da have

$$m = \frac{L}{cF'},$$

svarende til $\varphi = \pm \lambda$, eftersom m er $4p + 1$ eller $4p + 3$. Minimum af R og L faas her for $p = 1$, altsaa

$$L = 5\, cF',\; R = \frac{25\pi^2 EI}{L^2}.$$

Længden er $\frac{5}{2}$ Gange den, der gjælder for et Prisme med Endepunkterne i Abscisseaxen. Men

$$F'\left(\sin\frac{\lambda}{2}\right) = \frac{L}{5c} = \frac{l}{2c}$$

giver atter de samme Værdier for λ, som forhen. Naar et smalt Prisme derfor er indspændt i sit nederste Endepunkt og i et andet liggende i en Afstand lig $\frac{4}{5}$ af Længden derfra, saa vil et lodret Tryk nedad i den øverste Ende, dels fjerne denne fra den oprindelige Stilling, dels give Prismet en Figur, dannet af en og en Fjerdedel Bugt af den elastiske Kurve.

Overhovedet vil den elastiske Kurve i alle de Tilfælde, hvor $\omega = 0$, blive sammensat af Buestykker imellem de Punkter, hvor $\varphi = \pm \lambda$ (Vendepunkter), og dem, hvor $\varphi = 0$ (Maximums- og Minimumspunkter), ordnede symmetrisk om disse Punkters Ordinater. Buestykkernes Længde er $cF'\left(\sin\frac{\lambda}{2}\right)$, og Figuren sammensættes af 1, 2 eller 5 af disse, eftersom det nederste Endepunkt er indspændt, ingen af Enderne indspændte, men bundne til Lodlinien, eller baade det nederste og et Punkt til indspændt; i det andet Tilfælde ligger Figuren imellem to Vendepunkter, medens den i første og tredie falder imellem et Minimumspunkt og et Vendepunkt.

17. Er ω ikke nul, maa (13) for $x = 0$, $y = 0$, $\frac{d\varphi}{ds} = 0$ give

$$0 = Qa + Pb = (\pm a \sin \omega - b \cos \omega) R,$$

altsaa

$$\operatorname{tg} \omega = \pm \frac{b}{a}.$$

Den rette Linie fra Begyndelsespunktet til Kraftens Angrebspunkt har altsaa altid Ligningen

$$y = \pm \operatorname{tg} \omega \,.\, x.$$

Da dette i Følge (17) er Ligningen for den rette Linie, hvorpaa alle Vendepunkterne ligge, saa følger deraf, at Kraftens Angrebspunkt altid er et Vendepunkt. Man maa nu atter skjælne imellem de Tilfælde, hvor det nederste Punkt er indspændt og hvor dette ikke finder Sted.

Er der ingen Indspænding, saa er det nederste Punkt selv et Vendepunkt og Buelængden mellem Endepunkterne eller Prismets böjede Længde er da

$$l = 2pcF',$$

samt i Følge (18)

$$a = 2pc \cos \omega\, (2E' - F'), \quad b = 2pc \sin \omega\, (2E' - F').$$

De sidste give

$$a^2 + b^2 = 4p^2c^2\, (2E' - F')^2,$$

hvoraf følger det mærkelige Resultat, at Længden af Korden til det böjede Prisme er uafhængig af Kraftens Ret-

ning (ω) og den danner samme Vinkel med Abscisseaxen (Lodlinien) som Kraften, men opad, medens Kraftens Vinkel er nedad vendt.

Det vil fremdeles ganske paa samme Maade som forhen kunne bevises, at Materialet i Almindelighed kun tilsteder Prismet at slaa en enkelt Bugt. Man vil derhos for de samme Værdier af E, I, R, l, det vil sige for samme Tryk paa samme Materiale med de samme Dimensioner faa den samme Vinkel imellem Tangent og Abscisseaxe i det nederste Punkt, i hvilken Retning end Kraften virker til Tryk. Men er denne Vinkel λ, saa bliver Tangentens Vinkel med Abscisseaxen i Kraftens Angrebspunkt $-\lambda + 2\omega$.

Er det nederste Punkt alene indspændt, saa svarer dertil $\varphi = 0$, og man kan tage $\theta = \theta_0 + \frac{\pi}{2}$, x og y negative. Da Kraften virker i Vendepunktet, saa er Buelængden

$$L = (2p + 1)\, cF',$$

samt dens Projektioner paa Axerne

$$x = (2p + 1)\, c \cos \omega \,.\, (2E' - F'),\quad y = (2p + 1)\, c \sin \omega \,.\, (2E' - F'),$$

saa at man atter faar Korden imellem Endepunkterne uafhængig af ω, nemlig $(2p + 1)\, c\, (2E' - F')$, men saaledes beliggende, at den danner samme Vinkel med Lodlinien som Kraften, men i modsat Retning.

Man vil her let vise, at Materialets Beskaffenhed i Almindelighed kræver $p = 0$, altsaa $L = cF'$ kun halv saa stor, som naar der ingen Indspænding er, men Vendetangentens Stillinger blive de samme som i det foregaaende Tilfælde.

OM EN NY RÆKKE

CHROMAMMONIAKFORBINDELSER.

AF

S. M. JØRGENSEN.

Om en ny Række Chromammoniakforbindelser.

Af S. M. Jørgensen.

Af *Fremy's*[1]) og *Cleve's*[2]) Undersøgelser ved man, at der existerer Chromammoniakforbindelser, som have Charakter af hexavalente Baser, men de Methoder, som disse Forfattere benytte til Fremstilling af disse Forbindelser, give kun et yderst sparsomt Udbytte, hvad jeg baade ved af mundtlig Meddelelse af Professor *Cleve*, og hvad talrige og paa mange Maader varierede Forsøg her i Laboratoriet ogsaa noksom have bevist. Dette i Forbindelse med den Omstændighed, at de tre Rækker Chrombaser, som *Cleve* har fremstillet, men hvoraf de to rigtignok kun ere repræsenterede af 2 Salte hver, ikke viste nogen Analogi med de i flere Henseender saa omhyggeligt studerede Koboltbaser, har sikkert været Grunden til, at ingen Chemiker undtagen de to nævnte har indladt sig paa Studiet af disse mærkelige Forbindelser. *Siewert*[3]), der samtidig med *Cleve* forsøgte at fremstille *Fremy's* Salt, lykkedes det slet ikke at faae det dannet. Da nu i den nyeste Tid *Vortmann*[4]) har fremstillet Koboltsalte, der, skjønt *Vortmann* ikke fremdrager denne Analogi, aabenbart ere analoge med den Række af *Cleve's*

---

1) Compt. rend. 47, 883. 1858.
2) Oefvers. af K. Vet. Ak. Förh. 1861, 163. — K. Sv. Vet. Ak. Handl. 6, Nr. 4, 1865.
3) Zeitschr. für die ges. Naturwiss. 18, 244. 1861.
4) Ber. d. Deutsch. chem. Ges. in Berlin 1877, 154, 1451.

Chromsalte, som han kalder Tetramminchromforbindelser, saa forekom det mig utvivlsomt, at der ogsaa maatte existere Chromforbindelser, analoge med de bedre bekjendte Koboltbaser. Mine Forsøg have fuldstændig bekræftet denne Anskuelse, og det er en Række af disse Chromforbindelser, jeg her skal beskrive. Den slutter sig nøje i Sammensætning og Egenskaber til den Række Koboltsalte, jeg fornylig[1]) har beskrevet under Navnet Chloropurpureokoboltsalte, og vil derfor passende kunne benævnes Chloropurpureochromsalte. Men det vil tillige blive bevist i det følgende Arbejde, at der existerer Roseochromsalte, og idetmindste gjort i høj Grad sandsynligt, at der findes Bromopurpureochromsalte osv. og Luteochromsalte, analoge med de tilsvarende Koboltforbindelser. Nærværende Arbejde er derfor kun at betragte som en første Afdeling af de Undersøgelser, der skulle behandle hele det omfattende Æmne.

Da næsten enhver Fremstillingsmaade for de hexavalente Koboltbaser gaaer ud fra Forbindelser af det divalente Kobolt, saa har jeg tænkt mig, at man ogsaa bedst vilde komme til hexavalente Chrombaser ved at vælge en Forbindelse af det divalente Chrom til Udgangspunkt, og Forsøget har fuldkommen stadfæstet denne Opfattelse. Ved at gaae ud fra Chromchlorure, $Cr Cl_2$, kommer man uden Vanskelighed til den Forbindelse, der danner Grundlaget for hele det følgende Arbejde, nemlig

Chloropurpureochromchlorid.

Den fordelagtigste Fremstillingsmaade for dette Salt er følgende: Violet Chromchlorid udvaskes med koldt saltsurt, og derpaa med kogende Vand, tørres ved 130° og bringes derpaa i et Forbrændingsrør, hvis Dimensioner meget godt kan vælges saaledes, at der i en Operation kan arbejdes med 50 Gm. Chlorid; kun er det da nødvendigt ved den senere Reduktion jævnlig at vende Røret. Dette lukkes ved Propper, hvorigjennem gaae Rør med Geissler'ske Haner. Reduktionen sker ved svag Rødglødhede i en Strøm af tør Brint, som befries for iltelige Uren-

[1]) Overs. over K. D. Vid. Selsk. Forh. 1878, 16.

heder ved den af *Varenne* og *Hebré*[1]) anbefalede Blanding af 2 Dele dichromsurt Kali, 1 Del koncentreret Svovlsyre og 20 Dele Vand; for Ilt ved at passere en Opløsning af Pyrogallussyre i Natron og et glødende Rør med en over en Kjærne af sammensnoet Kobbertraad meget tæt rullet Kobbertraadnet-spiral. Skjønt Brinten ved mine Forsøg blev fuldt tørret ved Svovlsyre og Chlorkalcium, før den naaede Røret med det glødende Kobber, saa var den dog efter at have passeret dette paa ny fugtig, og der maatte derfor ogsaa efter dette indskydes et Tørreapparat[2]). Og hvorvel Chromchloridet var tørret ved 130°, gav det dog i den tørre Brintstrøm Fugtighed ved en Temperatur, som jeg vil anslaae til 200 til 300°. Naar derfor hele Apparatet er fyldt med Brint, lader man først alle Ovnens Flammer brænde svagt, til dette Vand er fuldstændig fordrevet; derpaa slukkes Flammerne paa nogle faa nær, som nu forstærkes, ved den Ende af Røret, hvor Brinten strømmer ind, og eftersom nu Reduktionen skrider frem, slukkes de Flammer, hvor Reduktionen er fuldendt, og tændes de længere fremme. Ellers gaar Reduktionen let videre under Dannelse af noget metallisk Chrom. Den udstrømmende Chlorbrinte[3]) passerer først en Wulffisk Flaske med koncentreret Svovlsyre, og derpaa ledes den i Vand, hvori Afledningsrøret netop dypper. Saasnart Reduktionen er fuldendt og Rørets Indhold hvidt, lader man det afkøles i Brintstrømmen, lukker Hanerne, og, idet man tager den ene Prop ud, bringer man hurtig den aabne Ende af Røret ned i en Opløsning af Salmiak i stærkt Ammoniakvand

---

1) Bull. soc. chim. [2] 28, 532.

2) Dette tyder paa, at Kobberet ikke befrier Brinten for Ilt ved at forene sig med denne, saaledes som man tidligere har antaget, men at det virker som Platinsvamp, altsaa bringer den Ilt, Brinten endnu indeholder, til at forene sig med Brint.

3) Selv efter omhyggelig Vaskning af et tilsyneladende fuldstændig rent Chromchlorid, fører den her udstrømmende Chlorbrinte Chloraluminium og Chlorjern med sig. Dette i Forbindelse med den Omstændighed, at selv ved 130° tørret Chromchlorid endnu indeholder Vand eller Chromoxychlorid (s. ovenfor) gjør, saavidt jeg skjønner, det violette Chromchlorid ubrugeligt til Bestemmelse af Chromets Atomvægt, hvortil *Siewert* (Ztschr. f. d. ges. Naturwiss. 17, 535) som bekjendt har anvendt det.

(paa 50 Gm. Chromchlorid omtrent 180 Gm. Salmiak og 1 Lit. Ammoniakvand). Det andet Hanerør sættes nu i Forbindelse med en Bunsen'sk Suger, hvormed den ammoniakalske Vædske drives op, saa at den fylder Forbrændingsrøret. I dette Øjeblik lukkes Hanen paa Røret, og ved nu afvexlende at lade den ammoniakalske Vædske løbe ud af Røret og igjen drive den op, opløses under en meget betydelig Varmeudvikling Chromchloruret med himmelblaa Farve. Næsten samtidig udskilles, idet den ammoniakalske Vædske kommer i Berøring med Luften, en rosen- til karmoisinrød krystallinsk Forbindelse (Prismer), der muligvis er Roseochromchlorid. Iltningen fuldendes, idet man lader den Bunsen'ske Suger omtrent et Kvarter suge Luft igjennem Vædsken, hvorved denne nu antager en meget smuk blod- til karmoisinrød Farve[1]). Derefter gydes (ved ovennævnte Mængder) 4 Litre raa stærk Saltsyre rask i Vædsken, det Hele ophedes til Kogning og koges nogle Minuter under stadig Omrøring. Allerede ved Kogningen udskilles en Mængde Chloropurpureochromchlorid som et næsten karminrødt Krystalpulver. Ved Afkøling og Henstand faaes endnu meget mere. Efter Dekantation af den afkølede Vædske[2]) findes Bunden af Skaalen be-

---

[1]) Undertiden, som det synes især ved Tilstedeværelse af rigelig fast Salmiak, findes der efter Iltningen paa Flaskens Bund udskilt et gult, krystallinsk Bundfald i ikke ringe Mængde, upaatvivlelig bestaaende af Luteochromchlorid, men hvorledes dette kan vindes heraf, maa være forbeholdt senere Meddelelser.

[2]) Denne er gulgrøn og indeholder sikkert Luteochromchlorid. Thi naar man bringer fast Jodkalium deri, udskilles snart et gult krystallisk Bundfald (Luteochromjodid?). Ligeledes fældes den stærkt saltsure Vædske næsten strax og især ved Henstand af Natriumkvægsølvchlorid. Bundfaldet, som i Forhold til den voluminøse Vædske naturligvis ikke er stort, er gult, glindsende krystallinsk (Oktaedre, 4- og 6 sidede Tavler og ret afskaarne 6sidede Prismer) og sandsynligvis en Blanding af flere Kvægsølvchloriddobbeltsalte. Heraf ville sikkert med Lethed rene Luteochromforbindelser kunne vindes, naar Hensyn tages til 1°, at Roseo- og Purpureochrom-Kvægsølvchloriderne ligesom de tilsvarende Koboltforbindelser sønderdeles af Saltsyre, men det her nævnte gule Bundfald, ligesom Luteokobolt-Kvægsølvchlorid ikke; og 2°, at vel Kobolt- men ikke Chromammoniakchloriderne (sml. S. 23) sønderdeles af Svovlbrinte. Dog maae videre Undersøgelser i denne Retning være forbeholdt en senere Meddelelse.

dækket med det røde Krystalpulver og med gule Salmiakkrystaller, hvori det farvende Princip mulig ligeledes er Luteochromchlorid. Dette forekommer dog, efter hvad jeg har Grund til at troe, her kun i ringe Mængde; derimod indeholder Salmiakkrystallerne en Del Purpureochlorid indesluttet, som kan vindes ved at behandle dem med en Blanding af lige Maal raa Saltsyre og Vand. Herved opløses nemlig Salmiaken, medens Chloropurpureochromchloridet bliver uopløst tilbage.

Det raa Purpureochlorid, som sædvanligt ogsaa indeholder noget grønt Chromoxychlorid, bringes paa et Filtrum og vaskes med svag Saltsyre. Derpaa opløses det paa Filtret ved Overhældning med varmt Vand, hvortil jævnlig sættes nogle Draaber svag Svovlsyre, der betydelig forøger Opløseligheden, og Vædsken filtreres ned i et stort Overskud af kold, stærk og ren Saltsyre. Da Purpureochloridet er uopløseligt i Saltsyre, saa udskilles det strax, men en Del forbliver dog i Opløsningen, idet det af det varme Vand omdannes til Roseochlorid (sml. nedenfor), der ikke fældes eller dog ikke fældes fuldstændigt. Bundfaldet (Purpureochlorid med lidt Roseochlorid) koges med lidt stærk Saltsyre, hvorved alt Roseochloridet omdannes til Purpureochlorid, vaskes med en Blanding af lige Maal stærk Saltsyre og Vand, derpaa syrefrit med Vinaand af 90° T. og tørres i Luften ved almindelig Temperatur. Den frahældte Opløsning af Roseochlorid i Saltsyre koges ligeledes, hvorved Størstedelen af dette Salt ligeledes udskilles som Purpureochlorid.

Ved denne Fremgangsmaade kan man ved omhyggeligt Arbejde af 50 Gm. vasket og tørret violet Chromchlorid vinde 35 Gm. Purpureochromchlorid, der til næsten alle Anvendelser er rent. Det kan imidlertid omkrystalliseres af varmt Vand, hvorom mere nedenfor. Samtidig vinder man c. 9 Gm. Luteochromkvægsølvchlorid.

Forbindelsen kan dog ogsaa fremstilles, uden at man behøver at gaae ud fra Chromchlorure, men i saa Fald optræder den egenlig kun som Biprodukt, Hovedproduktet er *Cleve's* Tetramminchlorid, som her vindes i betydelig større Kvantiteter end

det er muligt efter *Fremy's* og *Cleve's* Methode. Man gaaer her ud fra det af *Berzelius*[1]) fremstillede karmoisinrøde Ammoniumchromchlorid, som i dette Øjemed ikke behøver at fremstilles rent. Man kan blande en mættet Opløsning af 100 Gm. dichromsurt Ammoniak med omtr. 300 Ccm. raa Saltsyre af Vf. 1,17 og omtr. 70 Ccm. Vinaand af 90° T. i en rummelig Skaal, lade staae hen, til efter nogle Minutters Forløb den heftige, af en stærk Varmeudvikling ledsagede Reduktionsproces er forbi, derpaa tilsætte en stærk Opløsning af 200 Gm. Salmiak og nu under stadig Omrøring afdampe den grønne Opløsning til Tørhed ved Sandbadsvarme. Efter 24 Timers Henstand af den tørre Masse ved svag Sandbadsvarme, Overhældning med raa Saltsyre og gjentagen Afdampning er da Alt omdannet til en karmoisinrød Saltkage, der let løsner sig fra Skaalen, og som i fugtig Luft snart flyder hen med grøn Farve[2]), medens den i større Stykker kan opbevares længe i et ganske tørt, vel tillukket Glas. Den grovt knuste, fuldkommen tørre Masse bringes i 1 Lit. stærkt Ammoniakvand. Ved Henstand og Rystning i en veltillukket Flaske opløses da den langt overvejende Del af Saltet under Varmeudvikling, og Opløsningen sker saa hurtigt, at den karmoisinrøde Vædske allerede efter et Kvarters Forløb er uigjennemsigtig, selv i tynde Lag. Efter 24 Timers Henstand dekanterer man fra det endnu uopløste, nu mørkeblaa Bundfald, opløser dette i raa Saltsyre og overmætter rigelig med Ammoniak, hvorved nu Alt let opløses. Til de blandede ammoniakalske Vædsker sættes derpaa 4 Lit. raa Saltsyre, som i Forvejen er mættet ved alm. Temperatur med tør Chlorbrinte. Efter 24—48 Timers Henstand findes da udskilt et Lag af røde Krystaller under en næsten sort Salmiakmasse, hvorfra den ovenstaaende Vædske dekanteres. Denne afsætter ved længere Henstand endnu mere af de røde Krystaller og de sorte Saltkager. Hvis man istedetfor Saltsyre, der er mættet med Chlorbrinte, anvender

---

[1]) Oefvers. af K. Vet. Ak. Förh. 1844, 206.

[2]) Skulde dette skee, kan der bødes derpaa ved Tilsætning af stærk Saltsyre og fornyet Afdampning.

4 Lit. almindelig raa Saltsyre, saa faaer man ved at lade Vædsken henstaae omtr. ½ Time i et stort Bægerglas vel udskilt en ikke ringe Mængde rødt krystallinsk Chromammoniakchlorid, som, naar den endnu varme Vædske dekanteres, her strax kan faaes næsten salmiakfrit. Dekantatet afsætter da ved længere Henstand røde Krystaller og et lignende sort Salt som ovenfor ved Anvendelse af den stærke Syre, men mit Haab om, paa denne Maade strax at kunne faae Chloropurpureochromchloridet og Tetramminchromchloridet næsten fuldstændig skilte, glippede: de saaledes udskilte Krystaller indeholde allerede en meget betydelig Mængde Tetramminchlorid. Jeg maa derfor i det Hele anbefale Anvendelsen af den stærke Syre, da Udbyttet her er større og vindes hurtigere. Thi den ved Anvendelse af almindelig raa Syre efter 24—48 Timer frahældte Vædske vedbliver i Ugevis langsomt at afsætte sort Salt som indeholder mechanisk indblandede Chromammoniakchlorider.

Den sorte Saltmasse rystes i mange Sæt med en Blanding af lige Rumfang raa Saltsyre og Vand, hvorved Salmiaken opløses og det røde Saltpulver bliver tilbage. Hver Gang rystes det tørre Saltpulver op i Vædsken og dekanteres fra de sorte Salmiakkager. Til Slutning faaer man da en rigelig rød Afsætning af de blandede Chromammoniakchlorider, der sandsynligvis krystallisere sammen i alle Forhold. Idetmindste synes Blandingen under Mikroskopet fuldstændig homogen, bestaaende af rhombiske Krystaller af Kombinationen ∞ P. $\bar{P}$ ∞, hvilke Former ofte ere i Ligevægt, og de selvsamme Former gjenfindes hos begge Bestanddelene i ren Tilstand. Det røde Krystalpulver vaskes paa Filtret med en Blanding af lige Rumfang raa Saltsyre og Vand og tilsidst med en Blanding af lige Rf. ren stærk Saltsyre og Vand, til Filtratet er salmiakfrit; herved forandres Saltet ikke. Derpaa vaskes dette syrefrit med Vinaand af 90° T., og det (i Mørke) lufttørrede Salt behandles nu paa Filtret med Vand. De første Filtrater, som næsten alene indeholde Tetramminchromchlorid, ere meget mørkt karmoisinrøde. Ved Vaskning med koldt Vand skifter Saltblandingen tydelig nok Udseende og bliver fra karmoisinrød lilarød, sandsynligvis, fordi

den ene Bestanddel af den isomorfe Blanding opløses. Tilsidst er Vaskevandet forholdsvis svagt farvet og indeholder væsenlig Chloropurpureochlorid. Man kan passende samle de Filtrater for sig, som strax give Bundfald ved Rystning med en Opløsning af Ammoniumsulfat (1:5). Herved har jeg nemlig fundet, at Tetramminchloridopløsninger fældes under Udskillelse af et glimrende, storkrystallinsk Bundfald[1]) af det normale Chlorosulfat; dette Salt vaskes med rent Vand, hvori det er saare tungtopløseligt, presses mellem Papir og tørres over Svovlsyre. Derimod samles de Filtrater for sig, som strax give Bundfald med en stærk Opløsning af Fluskiselsyre. Herved fældes nemlig Chloropurpureochromsaltene næsten fuldstændig under Udskillelse af det charakteristiske Chloropurpureochromfluorsilikat, der her optræder i rene Rhomber (sml. S. 25). Disse Filtrater fældes nu med stærk Fluskiselsyre. Det prægtig krystallinske Bundfald vaskes syrefrit med koldt Vand og udrøres derpaa med en Blanding af lige Rf. stærk ren Saltsyre og Vand, hvorved Chlorofluorsilikatet omdannes til Chloropurpureochlorid. For at rense dette vaskes det paa Filtret først med den nævnte Saltsyreblanding, derpaa syrefrit med Vinaand. Efter Tørring i Luften er det dog, for at fjerne Spor af Fluorsiliciumbrinte, hensigtsmæssigst at opløse Saltet paa Filtret med koldt Vand og lade Opløsningen filtrere ned i et Overskud af stærk Saltsyre; herved udskilles Saltet strax og næsten fuldstændigt og er nu, efter at være vasket syrefrit med Vinaand og tørret, chemisk rent.

Saaledes kan af 100 Gm. dichromsurt Ammoniak vindes over 40 Gm. raa Chromammoniakchlorider og deraf 20 Gm. rent Chlorotetramminsulfat og 8 Gm. rent Chloropurpureochlorid.

Paa denne Maade har jeg ogsaa eftervist, rigtignok kun Spor af Chloropurpureochlorid i det efter *Cleve's* Fremgangsmaade fremstillede og omkrystalliserede Tetramminchromchlorid, idet ved brudt Opløsning de sidste Udtræk strax fældedes af Platinchlorid og ved Henstand af Fluskiselsyre, og begge Bundfald viste de for de tilsvarende Chloropurpureosalte charakteristiske Former.

[1]) Rhombiske Tavler paa meget nær 100° og 80°.

Fældet med Saltsyre danner Chloropurpureochromchloridet et rødt Krystalpulver, der meget minder om den analoge Koboltforbindelse, men dog er renere rød, mindre violet end denne. Under Mikroskopet viser det sig ligesom Koboltsaltet som Oktaedre eller oktaederlignende Former, idet den rhombiske Kombination $\bar{P}\infty . \infty P$ er i Ligevægt; thi hyppig vise sig ogsaa Former, hvor ∞P er stærkt fremtrædende. Men efter Omkrystallisation af varmt Vand (sml. nedenfor) og langsom Afkøling, altsaa i større Krystaller, er Chromforbindelsen meget forskjellig fra det omkrystalliserede Koboltsalt, idet dettes Krystaller da ere næsten sorte, men Chromsaltets pragtfuldt karminrøde, temmelig nær af samme Nuance som Rouge I paa Chevreul's 1e Cercle[1]), men renere i Farven. Vægtfylden (med Vandets Vægtfylde ved 4° som Enhed) har jeg i to Forsøg ved 15°,5 fundet = 1,687. Det lufttørre Salt er vandfrit, taber ikke Spor af Fugtighed over Svovlsyre eller ved 100° og gaaer, naar det under Adgang af Luften ophedes til en Temperatur, der ikke naaer Glødhede, under rigelig Udvikling af Salmiakdampe og under et Forbrændingsfænomen, der skrider roligt frem gjennem hele Massen, over til den theoretiske Mængde Chromtveilte.

Analyserne af Saltet have givet følgende Resultater:

1°. 0,4124 Gm. gav efter Kogning med Natron, til alt Ammoniak var uddrevet, og Filtrering fra det udskilte Chromtveiltehydrat 0,7275 Gm. Chlorsølv.

2°. 0,2566 Gm. gav ved Glødning 0,0802 Gm. Cr_2O_3.

3°. 0,4111 Gm. gav paa samme Maade 0,1290 Gm. Cr_2O_3.

4°. 0,5820 Gm. gav 0,1669 Gm. Cr_2O_3.

5°. 0,4575 Gm. gav ved samme Fremgangsmaade, som jeg anvendte for Chloropurpureokoboltsaltene[2]), 114,8 Ccm. Kvælstof, fugtigt maalt ved 769,2 Mm. og 14°,6.

6°. 0,4005 Gm. gav 99,6 Ccm. Kvælstof, fugtigt maalt ved 763,6 Mm. og 16°,1.

---

[1]) Mém. de l'Instit. de l'Acad. des Sciences T. 33. Tables chromatiques.

[2]) Overs. over K. D. Vid. Selsk. Forh. 1878, 42. Ligesaalidt som ved Koboltsaltene er det muligt at bestemme disse Chromforbindelsers Kvælstof som Ammoniak ved Kogning ved Natron.

Theori for $Cl_2.[Cr_2, 10 NH_3].Cl_4$.		Fundet:		
10 N	28,69	29,09	29,08	
2 Cr	21,52	21,48	21,52	21,55
6 Cl	43,67	43,64		

Analyserne 1 og 2 ere udførte med et Præparat, der var fremstillet direkte af Chromchlorure; 3 og 6 med et, hvor Chloropurpureochloridet først var omdannet til Chloronitrat (s. nedenfor) og dette igjen til Chlorid; 4 og 5 med 2 forskjellige Præparater, vundne af Ammoniumchromchlorid.

Chloropurpureochromchlorid er tungtopløseligt i koldt Vand. Opløsningen er violetrød, dog meget mindre violet end den tilsvarende Koboltforbindelses, i tykkere Lag karminrød. Ved 16° bruger 1 Del Salt omtr. 154 Dele Vand til sin Opløsning.

25,02 Gm. af den ved 18°,2 mættede Opløsning sønderdeltes ved Kogning med Natron. Til Titrering af Chloret brugtes, efter næsten fuldstændig Neutralisation ved Salpetersyre, 20,45 Ccm. 1/10 normalt Sølvnitrat ɔ: 1 Del Salt opløses i 150,1 Dele Vand af 18°,2.

Paa samme Maade brugte:

25,14 Gm. Opløsning, mættet ved 19°,5 : 20,94 Ccm. 1/10 $Ag NO_3$ ɔ: 1 D. Salt opløses i 146,7 Dele Vand,

37,12 Gm. Opløsning, mættet ved 15°,9 : 29,1 Ccm. 1/10 $Ag NO_3$ ɔ: 1 D. Salt opløses i 155,8 Dele Vand,

25,41 Gm. Opløsning, mættet ved 14°,6 : 19,6 Ccm. 1/10 $Ag NO_3$ ɔ: 1 D. Salt opløses i 158,4 Dele Vand.

Til de første 3 Forsøg anvendtes Præparater, fremstillede af Chromchlorure, til det sidste et, der var dannet af Ammoniumchromchlorid. Ved disse Forsøg er det vigtigt at paasee, at Opløsningen reagerer fuldstændig neutralt, da et ringe Spor af Saltsyre forandrer Opløseligheden betydeligt. Saltet er nemlig uopløseligt i Saltsyre, ja den koldt tilberedte vandige Opløsning fældes strax ved 1/2 Maal fortyndet Saltsyre og ved Henstand ved endnu meget mindre. Derimod er Saltet i Vand, hvortil er sat lidt svag Svovlsyre, ikke lidet opløseligere end i rent, sandsynligvis, fordi det svovlsure og især det sure svovlsure Chloropurpureosalt er ret let opløseligt i Vand.

Den neutrale, koldt tilberedte vandige Opløsning af Chloropurpureochromchlorid er meget lidt stabil. Henstillet i Lyset er den allerede efter 24 Timers Forløb delvis sønderdelt under Udskillelse af graat Chromtveiltehydrat; i Mørke holder den sig meget længere uden saadan dybere gaaende Sønderdeling, men Saltet omdannes dog efterhaanden til Roseochromchlorid. Den svagt sure Opløsning holder sig meget bedre, selv i Lyset.

Den neutrale Opløsning taaler kortvarig Kogning, dog ikke uden at Saltet deri delvis omdannes til letopløseligt Roseochromchlorid. Selv naar man til Omkrystallisation af Saltet overhælder det paa Filtret med kogende Vand og jævnlig tilsætter nogle faa Draaber svag Saltsyre, foregaaer Omdannelsen til Roseosalt i saa stor Maalestok, at man ved frivillig Afkøling af Vædsken ikke faaer mere end næppe fuldt Halvdelen af Saltet udskilt som uforandret Purpureochlorid.

Den her nævnte Omdannelse af Purpureochlorid til Roseochlorid skal jeg gaae noget nøjere ind paa, for det Første fordi den beviser, at der existerer en Række Roseochromsalte, aldeles analoge med Roseokoboltforbindelserne; dernæst for at oplyse Purpureo- og Roseochromsaltenes analytiske Forhold og vise, hvorledes man kan skjelne dem fra hinanden, naar de findes i samme Opløsning; endelig fordi en fuldstændig parallel Overgang finder Sted med Chloropurpureokoboltchlorid, naar man i længere Tid opvarmer det med Vand (1 : 100) under Tilsætning af noget Saltsyre (5 Draaber fortyndet Saltsyre til 100 Ccm. Vædske) paa et kogende Vandbad, Noget, man ikke tidligere er bleven opmærksom paa, og som man i Følge Roseokoboltchloridets sædvanlige Dannelsesmaade ingenlunde skulde vente. En sammenlignende Undersøgelse af Moderluden fra Omkrystallisationen af Chloropurpureochromchlorid og af den, som nævnt, dannede Koboltopløsning viser, at der findes en Analogi mellem disse Forbindelser, som gaaer til de mindste Details.

Moderluden fra Omkrystallisation af Chloropurpureochromchlorid har ikke Purpureosaltets karminrøde Farve, men er gulrød, dog er den noget rødere end en ren Opløsning af Roseochlorid, fordi den indeholder en ikke ringe Mængde Purpureo-

chlorid (som det synes, endog mere end end en ren vandig Opløsning af dette Salt). At dette er Tilfældet fremgaaer af følgende Forhold.

1°. Ved Tilsætning af 1 Maal stærk Saltsyre under Afkøling udskilles strax, ved 2 Maal fortyndet Saltsyre efter kort Henstand en Del Purpureochlorid. Efter 24 til 48 Timers Henstand i Kulden er saa at sige alt Chrom udskilt i denne Form, og det Samme sker strax efter kortvarig Kogning. Paa denne Maade kan, som man ser, den Halvdel af Chloropurpureochloridet, som bliver i Moderluden, let vindes igjen uden Tab. Koboltopløsningen forholder sig ganske paa samme Maade.

2°. Ved Tilsætning af Platinchlorid giver Chromopløsningen et brunligt Bundfald af ofte grenede, spidse Naale, der under Mikroskopet aldeles ikke ligner det Platindobbeltsalt, der faaes af den koldt tilberedte Opløsning, og hvis let kjendelige Aggregater nedenfor skulle beskrives. Ikke desto mindre bestaaer hint Platindobbeltsalt af rent Chloropurpureoplatinchlorid. Lufttørret taber det kun Spor af hygroskopisk Vand ved 100°, og Analysen har givet følgende Resultater:

0,2750 Gm. gav 0,1292 Gm. Cr_2O_3 + Pt.

0,2987 Gm. gav 0,1395 Gm. Cr_2O_3 + Pt, som efter Smeltning med Soda og Salpeter og Udkogning med Vand efterlod 0,1005 Gm. Pt.

Theori for $Cl_2.[Cr_2, 10\,NH_3].2\,PtCl_6$:		Fundet:	
Cr_2O_3 + 2 Pt	47,00	46,98	46,70
2 Cr	8,99		8,96
2 Pt	33,90		33,70

Koboltopløsningen giver under disse Forhold et Platindobbeltsalt, der i høj Grad minder om det anomalt udviklede Chromplatinsalt og fuldstændig afviger fra Chloropurpureokobolt-Platinchloridets sædvanlige Form, men har den rigtige Sammensætning. Og jeg har her udtrykkelig overbevist mig om, at man kun behøver at sætte lidt Roseokoboltchlorid til en koldt tilberedt Opløsning af Chloropurpureokoboltchlorid for at bringe Platindobbeltsaltet til at krystallisere paa hin anomale Maade.

3°. Ved Tilsætning af Fluorsiliciumbrinte give baade Chrom- og Koboltopløsningen først ved længere Henstand og jævnlig Rystning og endda kun sparsomt de respektive Chlorofluorsilikater, og medens disse af de koldt tilberedte Opløsninger af Purpureochloriderne optræde i saare charakteristiske og maalelige Former[1]), saa ere her i begge Tilfælde Formerne modificerede, saa at de ligne gjennemskaarne Lindser og saaledes ikke tilstede nogen Maaling. Jeg har for Koboltsaltets Vedkommende overbevist mig om, at en ringe Tilsætning af Roseochlorid forhindrer og forhaler Krystaldannelsen og modificerer Krystalformen paa nævnte Maade.

De under 2° og 3° nævnte Forhold antyde indirekte Tilstedeværelse af Roseochlorid i de to Opløsninger. Direkte bevises den ved følgende Forhold:

1°. Filtraterne fra de ovennævnte, anomalt udviklede Chloropurpureo-Platindobbeltsalte kunne ved nogen Tids Henstand endnu afsætte noget af disse, men Filtraterne herfra indeholde Roseochrom- og Roseokoboltplatinchlorid og vise i følgende Henseende nøjagtigt samme Forhold. Sættes Vinaand forsigtig til Vædsken, saa opstaaer paa Grændsen af det vandige og det vinaandige Lag et silkeglindsende, næsten snehvidt Bundfald af smaa, yderst tynde, ottesidede Tavler; sættes Vinaanden til uden videre Forsigtighed, saa dannes næsten strax et chamois Bundfald, der først efter nogen Tid sætter sig og da under Mikroskopet viser sig krystallinsk, men selv ved stærk Forstørrelse (1:400) ere Krystallerne meget smaa og utydeligt udviklede. Allerede ved 24 Timers Henstand under Vædsken omdannes dette Bundfald delvis til forholdsvis store, orangegule, ret afskaarne sexsidede Prismer, og denne Omdannelse foregaaer ligeledes snart, naar man strax forsøger at vaske det chamois Bundfald med Vinaand. Jeg har overbevist mig om, at en Opløsning af veritabelt Roseokoboltchlorid efter Tilsætning af Platinchlorid (som ikke fælder) viser nøjagtigt samme Forhold. Udfører man for Kontrollens Skyld dette Forsøg, er det dog

[1]) Sml. Overs. over K. D. Vid. Selsk. Forh. 1878, 17 og nedenfor.

nødvendigt efter Tilsætning af Platinchlorid at ryste Vædsken, lade den staae hen og filtrere for at fjerne det Spor af Purpureochlorid, næsten alt Roseochlorid indeholder, og som her kunde forstyrre Reaktionen. Bl. A. er det Bundfald, der fremkommer ved forsigtig Tilsætning af Vinaand, hvis dette Spor af Purpureochlorid ikke fjernes, vel næsten hvidt, men optræder ikke med den skinnende Atlasglands som i ganske rene Vædsker.

2°. Det almindelige normale Roseokoboltsulfat giver med Platinchlorid et krystallinsk Bundfald af $[10\,NH_3, Co_2].\genfrac{}{}{0pt}{}{(SO_4)_2}{Pt\,Cl_6}$ [1]. Da jeg havde fundet, at dette Salt alene optræder i hexagonale Tavler, og at det er meget tungtopløseligt, saa forsøgte jeg, om det ikke kunde dannes i ovennævnte vandige Filtrat fra det anomale Chloropurpureokoboltplatinchlorid. I Virkeligheden fik jeg her ved Tilsætning af Magniumsulfat næsten øjeblikkelig et glimrende, orangerødt Bundfald, som jeg strax erkjendte for identisk med *Gibbs's* Roseokoboltsulfatoplatinchlorid, hvad Analysen ogsaa viste. Nøjagtig paa samme Maade fik jeg af Moderluden fra Chloropurpureochromchloridets Omkrystallisation af varmt Vand, efter Tilsætning af Platinchlorid og Filtrering fra det anomalt udviklede Platindobbeltsalt, med svovlsur Magnesia et aldeles lignende, glindsende Bundfald, som næsten ikke var til at skjelne fra Koboltsaltet. Under Mikroskopet viser sig dog en Forskjel. Medens Koboltsaltets sexsidede Tavler næsten altid eller dog saare hyppig ere ligelig udviklede i alle Retninger, hvorved de faae Udseende af at være regulære eller hexagonale, optræder Roseochromsulfatoplatinchloridet i rhombiske Tavler, hvis spidse Hjørner ere afstumpede, og derved blev jeg opmærksom paa, at disse Afstumpninger vare skævt paasatte. Men ved nøjere Undersøgelse af Koboltsaltet og Maaling under Mikroskopet viste det sig nu ogsaa, at dettes Tavler ere uregelmæssige og ganske isomorfe med Chromsaltets. Kal-

---

[1]) *Gibbs.* Proceed. Amer. Acad. **11**, 18. 1876.

des 5 paa hinanden følgende Hjørner af Sexkanterne: a, b, c, d og e, saa er

	hos Koboltsaltet:	hos Chromsaltet:
Vinkel	abc = 115—116°	116°
	bcd = 119°	meget nær 120°
	cde = 123—124°	123°

Det har da ogsaa vist sig, at begge Salte ere dobbeltbrydende. Begge ere meget tungtopløselige i koldt Vand og lette at vaske. Jeg skal her anføre Analysen af Chromsaltet, tørret ved 100°, hvorved iøvrigt det over Svovlsyre tørrede Salt beholder sin Glands og kun taber et Spor af hygroskopisk Vand.

0,3086 Gm. efterlod ved Glødning under Luftens Adgang, tilsidst for Blæseren 0,1224 Gm. Cr_2O_3 + Pt, som efter Smeltning med Soda og Salpeter gav 0,0687 Gm. Pt.

0,5098 Gm. blev smeltet med Soda og Salpeter, Massen udtrukken med Vand og Udtrækket delt i to lige Dele; den ene tjente efter Overmætning med Salpetersyre til Chlorbestemmelse, den anden efter Overmætning med Saltsyre og gjentagen Afdampning med Saltsyre til Svovlsyrebestemmelse. Saaledes fik jeg 0,1148 Gm. Pt; 0,2511 Ag Cl; 0,1331 Ba SO_4.

Theori for $[10\,NH_3, Cr_2].\frac{Pt\,Cl_6}{(SO_4)_2}$:		Fundet:	
Cr_2O_3 + Pt	39,98	39,66	
Pt	22,55	22,27	22,50
2 Cr	11,96	11,93	
6 Cl	24,26	24,37	
2 SO_3	18,22	18,00	

3°. Med Moderluden fra Omkrystallisationen af Purpureochromchlorid giver Ferridcyankalium ved Rystning strax et brunliggult, glindsende krystallinsk Bundfald, der under Mikroskopet viser sig at bestaae af gule, sexsidede, augitlignende Prismer, hvis Ender dog kun undtagelsesvis ere tydelig begrændsede af to Pyramideflader, medens de sædvanlig, paa Grund af en ganske lignende Tvillingdannelse som den, der saa hyppig forekommer hos Augit, ere mindre tydelige. Gan-

ske saaledes har Hr. Cand. *O. Christensen*, som i polytechnisk Læreanstalts Laboratorium for Tiden er beskæftiget med Undersøgelsen af Roseochromsaltene, fundet Ferridcyanroseochrom krystalliseret. Ovennævnte Koboltopløsning forholder sig aldeles analogt; den giver ved Tilsætning af Ferridcyankalium strax Ferridcyanroseokobolt. Naar derfor *Gibbs* og *Genth* have faaet dette Salt af Chloropurpureokoboltchlorid og heri see en meget ejendommelig Overgang fra Purpureo- til Roseorækken[1]), saa vise ovenstaaende Forhold, at denne Overgang er meget almindelig, idet Purpureochlorid (og iøvrigt ogsaa næsten alle andre Purpureokobolt- og Purpureochromsalte) ved simpel Opvarmning, ja ofte endog ved blot Henstand af deres Opløsninger delvis eller undertiden fuldstændig gaae over til Roseosalt. Dog synes denne Overgang at foregaae lettere i Chrom- end i Koboltrækken.

Det følger heraf, at man til Fremstilling af Chloropurpureochromsalte saavidt muligt bør anvende koldt og frisk tilberedte Opløsninger af Chloridet.

I Ammoniakvand opløses Chloropurpureochromchlorid uden dybere gaaende Sønderdelinger. Opløsningen er vel noget mere violet end den vandige, men selv efter kortvarig Kogning giver den ved Kogning med Saltsyre uforandret Purpureochlorid. Ved længere Kogning af den ammoniakalske Vædske begynder der vel at udskilles Chromtveiltehydrat, men den maa koges længe, før Sønderdelingen bliver fuldstændig. Ved Nærværelse af en stor Mængde Salmiak synes Forbindelsen endog slet ikke at paavirkes selv ved langvarig Kogning med stærkt Ammon. Selv med Natron antager den vandige Opløsning vel en mere violetrød Farve og sønderdeles hurtigere end ved Kogning med Ammon., men man kan dog holde Opløsningen 20 til 30 Minuter paa et kogende Vandbad, før den over det udskilte Chromtveiltehydrat staaende Vædske fuldstændig taber den røde Farve.

Ved svag Opvarmning med Chlornatron destrueres Chloro-

---

1) Sill. Amer. Journ. [2] 23, 326.

purpureochromchlorid fuldstændig, alt dets Kvælstof udvikles som saadant, alt dets Chrom gaaer over til Chromsyre.

Overfor forskjellige Prøvemidler viser den koldt og frisk tilberedte Opløsning af Saltet følgende Forhold. Flere af de fremkomne Bundfald ville blive nærmere beskrevne nedenfor, flere af dem agter jeg at undersøge nøjere.

Selv fortyndet Saltsyre udskiller strax uforandret krystallinsk Chloropurpureochromchlorid. Endog i meget fortyndede Opløsninger kan, saa at sige, alt Chrom idetmindste ved koncentreret Saltsyre i Overskud og ved Henstand udskilles i denne Form.

Stærk Brombrinte udskiller et rødt krystallinsk Bundfald af Chloropurpureochrombromid (S. 23), noget mere violet end Chloridet.

Rystes Opløsningen med fast Jodkalium, saa udskilles øjeblikkeligt næsten alt Chrom i Form af Chlorojodid. Bundfaldet ligner Chlorobromidet, men er lidt mere violet. Ogsaa en stærk Opløsning af Jodkalium, anvendt i stort Overskud, frembringer Bundfald ved Henstand.

Cyankalium paavirker tilsyneladende ikke den koldt mættede Opløsning, men ved nogen Kogning dermed bliver Vædsken gul, efter al Rimelighed idet der dannes Chromidcyankalium.

Fortyndet Salpetersyre, der dog maa anvendes i rigeligere Mængde end Saltsyre, fælder snart. Koncentreret ligeledes. Bundfaldet, der ligner Chlorochloridet, men er mere karminrødt, bestaaer af krystallinsk Chloronitrat (S. 27).

Fluorsiliciumbrinte i Overskud fælder strax, navnlig ved Omrystning, et glimrende krystallinsk, rødt Bundfald af Chloropurpureofluorsilikat (S. 25).

Brintplatinchlorid giver i almindelige Opløsninger strax og selv i stærkt fortyndede i alt Fald ved Henstand et glindsende krystallinsk, chamoisbrunt Bundfald af Chloropurpureochromplatinchlorid (S. 14 og 24).

Natriumplatinbromid giver strax et orangerødt krystallinsk Bundfald, der under Mikroskopet ganske ligner Chloriddobbeltsaltet (se S. 24) og kun er noget mørkere.

Kvægsølvchlorid eller Natriumkvægsølvchlorid i Overskud fælder strax rosenrøde Naale af Kvægsølvchloriddobbeltsaltet (S. 26).

Natriumkvægsølvbromid forholder sig paa samme Maade. Bundfaldet er mere violet og bestaaer af Chloropurpureochromkvægsølvbromid (S. 27).

Kaliumkvægsølvjodid (ɔ: ¼ normal Jodkaliumopløsning, mættet ved Kogning med Kvægsølvjodid, derpaa afkølet, fortyndet med et Par Rumfang Vand og filtreret fra udskilt Jodkvægsølv) giver strax et rigeligt chamois Bundfald af lange, tynde Naale[1]). Men sætter man først til Chloropurpureochromchlorid-Opløsningen Jodkaliumopløsning i rigelig Mængde, saa udskiller hin Opløsning af Kaliumkvægsølvjodid et lilarødt pragtfuldt Bundfald af diamantglindsende millimeterbrede Blade, der under Mikroskopet viser sig hovedsagelig som rhombiske Tavler paa 96° og 84°, men hyppig uregelmæssig udviklede, afskaarne og kløftede[2]). Der kan næppe være Tvivl om, at i Analogi med Koboltforbindelserne det første af disse Salte er sammensat Cl_2. [Cr_2, 10 NH_3]. ($Hg I_3$)$_4$, medens det sidste har Formlen Cl_2. [Cr_2, 10 NH_3]. ($Hg I_4$)$_2$.

Svovlundersurt Natron giver efter kort Henstand lange, glimrende karminrøde Naale af Chlorodithionatet (S. 31).

Chromsurt Kali udskiller ved Omrystning strax Chlorochromatet (S. 34) som et teglstensbrunt, kornet krystallinsk Bundfald.

Dichromsurt Kali giver næsten strax et rigeligt Bund-

---

[1]) Ganske saaledes faaes ogsaa det tilsvarende Koboltsalt (nemlig af den koldt mættede Opløsning af Chlorochloridet) og fremstilles maaske bedst saaledes, men maa strax filtreres fra; ellers danner ogsaa det i brune Blade optrædende Dobbeltsalt. Sml. Overs. over K. D. Vid. Selsk. Forh. 1878, S. 28.

[2]) Koboltforbindelsen (s. Note 1) fremkommer paa samme Maade ɔ: af en koldt mættet Purpureochloridopløsning meget sparsommere og først ved Henstand. Krystallerne ere ligesaa glindsende, men brune. De vise samme rhombiske Tavle (maalt 83° til 83°,5 og 95°,5 til 96°), men endnu mere uregelmæssigt afskaaret.

fald, bestaaende af Knipper og Rosetter af flere Mm. lange, orangegule Naale.

Molybdænsurt Ammon [ɔ: 3 $(NH_4)_2O$, 7 MoO_3, 4 H_2O] giver et rigeligt rosenrødt Bundfald, der opløses i et Overskud af Fældningsmidlet, men snart udskilles igjen som et rosenrødt Krystalpulver (Rosetter af selv under Mikroskopet meget smaa rhombiske Blade). Den ovenstaaende Vædske er farveløs.

Diphosphorpentamolybdænsurt Ammoniak giver strax et rigeligt, rosenrødt Bundfald.

Pikrinsyre fælder selv af den fortyndede Opløsning lange, gule Naale.

Oxalsurt Ammon udskiller ved kort Henstand og især ved Rystning karmoisin- til karminrøde Naale af Chlorooxalatet (S. 34).

Ferridcyankalium, ortho- og pyrophosphorsurt Natron, svovlsurt Ammon eller Kaliumguldchlorid fælder ikke Opløsningen.

I alle disse Forhold ligner Chloropurpureochromchlorid aldeles Chloropurpureokoboltchlorid[1]), og Ligheden bliver end større derved, at flere af de nævnte Bundfald under Mikroskopet vise charakteristiske, undertiden endog maalelige Former, og at disse da altid vise sig ens for de tilsvarende Chrom- og Koboltforbindelser; selv en ejendommelig Udviklingsmaade hos den ene Række Krystaller gjenfindes næsten altid til de mindste Details hos den anden.

Særdeles fremtrædende er ogsaa denne Lighed i de to Rækkers Forhold overfor Sølvsalte. Sætter man et Overskud af Sølvnitrat til en koldt og frisk tilberedt Opløsning af Chloropurpureochromchlorid og ryster, saa samler Bundfaldet sig let som Tegn paa, at Fældningen er fuldstændig, men der fældes herved kun 4 af Saltets 6 Chloratomer; Filtratet har endnu Chloropurpureosaltenes Farve og indeholder en Blanding af Chloropurpureochromnitrat og Sølvnitrat. Koges dette Filtrat

---

[1]) Sml. mit Arbejde om de af dette afledede Forbindelser i Overs. over K. D. Vid. Selsk. Forh. 1878, S. 16 ff.

efter Tilsætning af lidt svag Salpetersyre, saa gaaer Purpureosaltet over til Roseosalt, og nu udskilles de 2 (fundet 1,94) resterende At. Chlor i Form af Chlorsølv.

Heller ikke Sølvkarbonat udskiller Choropurpureochromchloridets radikale Chlor (sml. nedenfor under Chlorosulfatet), men Sølvilte og Vand udskiller af Chloropurpureochrom- ligesom af Choropurpureokoboltchlorid saare let alt Chlor, og Filtratet indeholder Roseochromhydrat. De af dette afledede Salte blive, som ovenfor nævnt, for Øjeblikket undersøgte i polytechnisk Læreanstalts Laboratorium. Her skal jeg kun bemærke, at den stærkt alkaliske, dybt røde Opløsning af Roseochromhydrat med Overskud af stærk Brombrinte giver et rødgult Bundfald, der utvivlsomt bestaaer af Roseochrombromid, og at dette, naar man koger det med den ovenstaaende Vædske, omdannes til et rødviolet Bundfald af mikroskopiske Oktaedre, i hvilken Form ved Afkøling saa at sige Alt udskilles. Der kan ingen Tvivl være om, at den rødviolette Forbindelse er Bromopurpureochrombromid, thi ganske ad samme Vej har jeg i Koboltrækken fremstillet Bromopurpureobromidet, som er blaaviolet, og deraf en stor Række med Chloropurpureosaltene ganske analoge Bromopurpureosalte.

Jeg har ligeledes overbevist mig om, at ved Indvirkning af kold koncentreret Svovlsyre udvikles kun $^2/_3$ af Chloropurpureochromchloridets Chlor i Form af Chlorbrinte, og at herved dannes [surt?] Chloropurpureochromsulfat.

I en enkelt Retning viser disse Kobolt- og Chromforbindelser dog en paafaldende Forskjel, som har sin Grund i de to Metallers forskjellige Natur. Koboltatomet har særlig Tilbøjelighed til at optræde divalent, men i disse Ammoniakforbindelser virke undtagelsesvis to sammenbundne Koboltatomer hexavalent. Derimod er denne sidste Virkemaade jo ganske almindelig hos Chrom, saadanne Chromforbindelser ere meget stabile og reduceres navnlig vanskelig til saadanne, hvori Chromatomet virker divalent. Derfor er de to Rækkers Forhold overfor Reduktionsmidler aldeles forskjelligt.

S v o v l b r i n t e fælder af Chloropurpureokoboltchlorid sort

Svovlkobolt, men paavirker slet ikke Chromforbindelsen (s. f. Ex. nedenfor Analysen af dennes Kvægsølvdobbelthaloidsalte).

Svovlammonium forholder sig paa samme Maade som Svovlbrinte overfor Chloropurporeokoboltchlorid, men paavirker tilsyneladende slet ikke Chromforbindelsen. Anvendes gult Svovlammonium, faaes endog ved Tilsætning af Vinaand et krystallinsk Pentasulfid, analogt med Alkalimetallernes Pentasulfider, og hvori Chloropurpureochromgruppen er uforandret.

Ferrocyankalium sønderdeler strax en koldt tilberedt Opløsning af et Chloropurpureokoboltsalt. Opløsningen bliver stærkt alkalisk (af Ammoniak), og der dannes et grønligt Bundfald, som ved Henstand bliver brunt. Alt tyder paa, at Ferrocyankalium ved denne Reaktion iltes til Ferridcyankalium, som da med en Ammoniakforbindelse af det divalente Kobolt danner det brune Bundfald. Chromforbindelsen omdannes derimod af Ferrocyankalium ved simpel Dobbeltsønderdeling til det normale Chloropureochromferrocyanid (S. 35).

Hermed skal jeg afslutte Omtalen af Chloropurpureochromchlorid, idet mange Iagttagelser, som pege i forskjellige Retninger, først vilde kunne vurderes ved en videre Udarbejdelse af det omfangsrige Æmne, med hvilken jeg stadig er beskjæftiget, og gaae over til at beskrive de andre Chloropurpureochromsalte, jeg har underkastet et nøjere Studium.

Chloropurpureochrombromid. $Cl_2.[Cr_2, 10 NH_3].Br_4$.

Dette Salt faaes lettest ved at filtrere den koldt mættede Opløsning af Chlorochloridet ned i stærk Brombrintesyre, hvorved næsten alt Chrom fældes som Chlorobromid. Dette er et smukt rødt, krystallinsk Bundfald, væsenlig af samme Farve som det fældede Chlorid, dog noget blegere og med en noget mere violet Nuance. Under Mikroskopet viser det sig som Oktaedre, ofte sammenvoxede ved Spidserne til Naale og Stjerner. Det vaskes først med svag Brombrinte, derpaa syrefrit med Vinaand af 90° T. Det lufttørrede Salt er vandfrit[1]). Ved Ophedning

[1]) Til Analysen er det Salt ligesom alle følgende, hvor andet ikke er bemærket, tørret ved 100°, hvorved de lufttørrede Salte afgive en Brøkdel af en Procent hygroskopisk Vand

under Luftens Adgang forholder det sig som Chloridet. Det er noget lettere opløseligt i Vand end dette, og den vandige Opløsning giver med Overskud af kold stærk Saltsyre Chloridet, ved Rystning med Fluskiselsyre strax Chlorofluorsilikatet i dettes charakteristiske Form.

0,2483 Gm. gav ved Glødning under Luftens Adgang 0,0559 Cr_2O_3.

0,4163 Gm. gav efter Kogning med Natron 0,6481 Ag (Cl, Br), som omdannedes til 0,5361 Ag Cl.

	Theori:	Fundet:
2 Cr	15,76	15,77
2 Cl	10,66	10,39
5 Br	48,21	48,34

Chloropurpureochrom-Platinchlorid.

$Cl_2.[Cr_2.10NH_3].(PtCl_6)_2$.

I de koldt tilberedte Opløsninger af alle Chloropurpureochromsalte, hvor ingen Sidevirkninger indtræde, (til Fremstilling anvendes naturligvis lettest Chloridet) frembringer Brintplatinchlorid en næsten fuldstændig, chamoisbrun, krystallinsk Fældning, der under Mikroskopet ikke er til at skjelne fra den analoge Koboltforbindelse. Navnlig viser ogsaa Chromsaltet sig som Aggregater af gule rektangulære Prismer, tilskærpede af et makrodiagonalt Doma, og disse Prismer ere, naar Saltet udskilles af forholdsvis stærke og svagt sure Opløsninger, næsten altid sammenvoxede parallelt, saaledes at der dannes et skævt Kors, hvis Grene danne en Vinkel af nogle og tredive Grader med hinanden, og selv naar Krystallerne forekomme enkeltvis, vise de enkelte rektangulære Prismer stærkt iøjnefaldende Diagonaler. Er Saltet udskilt af fortyndede og stærkt sure Opløsninger, optræder Kombinationen $\infty\bar{P}\infty.\infty\breve{P}\infty.\bar{P}\infty$ hyppig ren. Indeholder Opløsningen foruden Purpureosalt ogsaa Roseosalt, viser Saltet sig i meget modificeret Skikkelse (sml. S. 14). Yderst tungtopløseligt i Vand, saa at endog en kold Opløsning af Chlorofluorsilikatet fældes af Brintplatinchlorid, skjønt først ved Henstand. Vandfrit.

0,274 Gm. efterlod ved Glødning under Luftens Adgang 0,1289 $Cr_2O_3 + Pt$, som smeltet med Soda og Salpeter gav 0,0831 Pt.

0,1343 Gm. gav ved Smeltning med Soda og Salpeter 0,1436 chromfrit Platin. Opløsningen brugte efter næsten fuldstændig Neutralisation med Salpetersyre 52,2 Ccm. 1/10 normalt Sølvnitrat.

	Theori:	Fundet:
$Cr_2O_3 + 2\,Pt.$	47,00	47,04
2 Cr	8,99	8,99
2 Pt	33,90	33,94
14 Cl	42,48	42,66

Chloropurpureochrom-Siliciumfluorid.


$Cl_2.[Cr_2, 10\,NH_3].(Si\,F_6)_2.$

Af alle opløselige Chloropurpureochromsalte fældes dette Salt ved Tilsætning af et Overskud af stærk Fluskiselsyre. Af de koldt og frisk tilberedte Opløsninger af Chlorochlorid og Chloronitrat faaes Saltet udskilt som glimrende Krystalblade af en noget anden Nuance end Chlorochloridets. Farven kan tildels paa Grund af Glandsen kun bestemmes som temmelig mørk rosa. I Reglen vise Krystallerne sig allerede for det blotte Øje som rhombiske Tavler. Under Mikroskopet vise de sig hyppigst som rene Rhomber, hvori den spidse Vinkel ved 4 Maalinger af 4 Krystaller (under Mikroskopet) kun varierede fra 73° til 73,°5. Saltet er altsaa fuldstændig isomorft med den analoge Koboltforbindelse[1]), hvis tilsvarende Vinkel er 73,°75 til 74,°25. Jævnlig afskæres Vinklerne i denne Form (betragtet som $\bar{P}\infty.\ \infty\breve{P}\infty$) af $0P$ og $\infty\bar{P}\infty$, undertiden kan endog $\bar{P}\infty$ ganske forsvinde (s. f. Ex. S. 30), saa at Saltet viser sig som rektangulære Tavler, hvorpaa dog nu og da et Hjørne er afskaaret af $\bar{P}\infty$. Saltet er meget tungtopløseligt i rent Vand med Chloropurpureochromsaltenes sædvanlige Farve, det er uopløseligt i Fluskiselsyre. Af den vandige Opløsning fælder Platinchlorid ved Henstand Chloroplatinchloridet. Ved Behandling med middelstærk Saltsyre i Kulden omdannes Saltet til Chlorochlorid. Det indeholder Chlor i betydelig Mængde. I Betragtning af denne Forbindelses fuldstændige Analogi med det tilsvarende Koboltsalt har jeg nøjedes med at konstatere, at det

[1]) Overs. over K. D. Vid. Selsk. Forh. 1878, S. 29.

lufttørre Salt kun taber Spor af hygroskopisk Vand over Svovlsyre og det saaledes tørrede ligeledes kun Spor ved 100°, og at Saltet indeholder den beregnede Mængde Chrom.

0,1183 Gm. efterlod, ophedet forsigtigt og tilsidst glødet under Luftens Adgang, 0,1085 Cr_2O_3, som efter Afdampning med Flussyre og fornyet Glødning vejede 0,1087.

	Theori:	Fundet:
2 Cr	16,66	16,64

Chloropurpureochrom-Kvægsølvchlorid.

$Cl_2.[Cr_2, 10NH_3].(Hg_3Cl_8)''_2$.

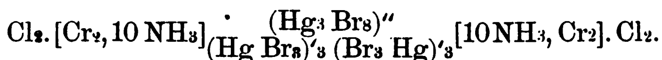
Med Overskud af Kvægsølvchlorid eller Natriumkvægsølvchlorid giver den koldt tilberedte Chlorochloridopløsning strax et rigeligt krystallinsk, smukt rosa Bundfald, der allerede for det blotte Øje viser sig som lange Naale; under Mikroskopet ses de at være ret afskaarne ligesom det analoge Koboltsalts. Baade ved dette og ved andre Chloropurpureochromsalte, der fremstilles ved Hjælp af neutrale Fældningsmidler, er det vigtigt at filtrere Saltet fra strax efter dets Dannelse, da den neutrale Moderlud, idetmindste i Lyset, snart begynder at sønderdeles. — Det lufttørrede Salt er vandfrit og meget tungtopløseligt i Vand. Det maa opbevares i Mørke, da det i Lyset, om end langsomt, sønderdeles. Allerede ved Rystning med et Overskud af kold, svag Saltsyre spaltes det fuldstændigt i Kvægsølvchlorid, som opløses, og Purpureochromchlorid, som udskilles. Ved forsigtig Ophedning og tilsidst Glødning under Luftens Adgang efterlader det den beregnede Mængde Chromtveilte.

0,8819 Gm. gav ved Glødning 0,0635 Cr_2O_3.

0,6118 Gm. blev opvarmet paa Vandbad med lige Rumfang Saltsyre og Vand. Ved Afkøling udskiltes en Del Purpureochlorid; Filtratet, der indeholdt Roseochrom- og Kvægsølvchlorid, blev fældet med Svovlbrinte, hvorved erholdtes 0,4023 HgS.

	Theori:	Fundet:
2 Cr	4,97	4,94
6 Hg	56,76	56,69

Chloropurpureochrom-Kvægsølvbromid.



$$Cl_2.[Cr_2, 10\,NH_3]\overset{\cdot}{}_{(Hg\,Br_3)'_3}\overset{(Hg_3\,Br_8)''}{}_{(Br_3\,Hg)'_3}[10\,NH_3, Cr_2].Cl_2.$$

Dette Salt dannes som det foregaaende, kun med Anvendelse af Kalium-Kvægsølvbromid. Det optræder i fine Naale, der ere noget mere violetrøde end Chloriddobbeltsaltets og noget mere følsomme overfor Lyset. Forøvrigt er det meget tungtopløseligt i Vand og efterlader ved Glødning alt Chrom som Chromtveilte. I Anledning af den temmelig komplicerede Formel maa jeg bemærke, 1° at den stemmer fuldstændig med Analyserne, medens Kvægsølvbestemmelsen, hvis Formlen var den simplere $Cl_2.[Cr_2, 10\,NH_3].(Hg\,Br_3)_4$, skulde være faldet 1,4 pCt. for højt, Chrombestemmelsen 0,4 pCt. for lavt ud [1]); 2° at den paa samme Maade dannede Koboltforbindelse har den analoge Formel, som jeg ved specielle Forsøg har overbevist mig om[2]); og endelig 3°, at naar man forsøger paa at fremstille Forbindelsen af Purpureochromchlorid og den til Dannelsen af $Cl_2.[Cr_2, 10\,NH_3].(Hg\,Br_3)_4$ theoretisk nødvendige Mængde Kalium-Kvægsølvbromid, $K_2\,Hg\,Br_4$, faaes et Filtrat, som med Kaliumkvægsølvbromid paa ny giver et rigeligt Bundfald af Forbindelsen.

0,8769 Gm. gav ved Glødning 0,05·6 Cr_2O_3.

0,6363 Gm. gav paa samme Maade 0,0427 Cr_2O_3.

0,5979 Gm. gav, behandlet som foregaaende Salt, 0,273 HgS.

	Theori:	Fundet:	
4 Cr	4,59	4,59	4,61
9 Hg	39,37	39,39	

Chloropurpureochromnitrat.



$$Cl_2.[Cr_2,\ 10\ NH_3].\ (NO_3)_4.$$

Til Fremstilling af dette Salt opløser man Chloropurpureochloridet paa Filtret i lunkent Vand under jævnlig Tilsætning af nogle Draaber svag Svovlsyre, og filtrerer Opløsningen ned

---

1) Chlor- og Brombestemmelserne, der her maatte udføres ved indirekte Methoder og i denne Forbindelse tilmed ere forbundne med særegne Vanskeligheder, kunde ikke ventes at give afgjørende Resultater, dertil afvige Procenttallene for de to Formler for lidet.

2) Journ. f. prakt. Chem. [2] 18, 226.

i et stort Overskud af med Is afkølet stærk Salpetersyre. Herved udskilles meget snart Chloronitratet som et pragtfuldt, rent karminrødt, krystallinsk Bundfald, der under Mikroskopet viser sig at bestaae af oktaedriske Krystaller, hyppigt af Aggregater af 4 sammenvoxede Oktaedre. Forbindelsen kan vaskes ved Dekantation med en kold Blanding af lige Maal Salpetersyre af Vf. 1,4 og Vand, og derpaa, naar Decantatet er chlorfrit, med Vinaand af 93° T., dog maa man vaske længe og under Sugning med Vinaand, før hvert Spor af fri Salpetersyre er fjernet. Saltet kan omkrystalliseres ved at overgyde det paa Filtret med varmt Vand under jævnlig Tilsætning af nogle Draaber svag Salpetersyre. Ved Afkøling af Filtratet og Henstand udskilles da Chloronitratet i pragtfulde millimeterstore, men sjeldent tydeligt udviklede karminrøde Krystaller og Krystalaggregater. Dog lides herved et betydeligt Tab, idet ²/₅ af Saltet forbliver i Moderluden, for største Delen som Roseosalte, hvad jeg har eftervist paa samme Maade som ved Chloridet. Af denne Moderlud udskilles iøvrigt ved Tilsætning af 2 til 3 Maal stærk Salpetersyre under Afkøling, efter kort Henstand gule, glimrende, centimeterlange Naale. Den tilsvarende Forbindelse har jeg faaet i Koboltrækken, som et chlorfrit Nitrat, der synes at være bestemt forskjelligt baade fra Roseonitrat og fra Nitratopurpureonitrat. Om denne Forbindelse skal jeg senere meddele nærmere for begge Rækkers Vedkommende. Det lufttørre Chloropurpureochromnitrat er vandfrit og taber ved 100° kun Spor af hygroskopisk Vand. Ved Ophedning sønderdeles det temmelig heftigt, dog uden Explosion, og giver, ophedet først i en veltillukket Digel og derpaa under Luftens Adgang den theoretiske Mængde Chromtveilte. Analysen af det ved 100° tørrede Salt gav mig følgende Resultater:

0,2146 Gm. efterlod ved Glødning 0,0516 Cr_2O_3.

0,4415 Gm. gav, efter Kogning med Natron osv., 0,2152 AgCl.

0,4311 Gm. (fremstillet af det af Ammoniumchromchlorid dannede Purpureochlorid) gav ved Forbrænding med Kobberforilte og Kobbertveilte osv. (sml. S. 11) 125 Ccm. Kvælstof, fugtigt maalt ved 19°,0 og 760,7 Mm.

0,4078 Gm. gav 0,1980 AgCl.

	Theori:		Fundet:	
2 Cr	17,68		17,47	
14 N	33,00		33,25	
2 Cl	11,95		12,06	12,00

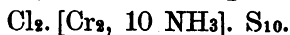
Saltet er betydeligt lettere opløseligt i Vand end Chloridet, nemlig i 71 Dele Vand ved $17^{0},_{5}$.

$23,_{648}$ Gm. af den ved $17^{0},_{2}$ mættede Opløsning gav, efter fuldstændig Sønderdeling ved Kogning med Natron, et Filtrat, der forbrugte $11,_{05}$ Ccm. $^{1}/_{10}$ normalt Sølvnitrat ɔ: 1 Del Salt opløses ved $17^{0},_{2}$ i $71,_{1}$ Dele Vand.

$26,_{00}$ Gm. af den ved $17^{0},_{9}$ mættede Opløsning brugte paa samme Maade $12,_{2}$ Ccm. $^{1}/_{10}$ normalt Sølvnitrat ɔ: 1 Del Salt bruger ved $17^{0},_{9}$ $70,_{8}$ Dele Vand til sin Opløsning.

Den mættede Koldtvandsopløsning fældes næsten fuldstændig af sit lige Rumfang svag Salpetersyre (ɔ: 1 Maal Syre af Vf. $1,_{4}$ + 2 Maal Vand). Det saaledes udskilte Salt bestaaer udelukkende af mikroskopiske Oktaedre, dog næppe regulære. Filtrerer man den koldt mættede Opløsning ned i et stort Overskud af kold, med $^{1}/_{2}$ Rf. Vand fortyndet, stærk og ren Saltsyre, saa omdannes Chloronitratet til den theoretiske Mængde Chloropurpureochlorid, idet dette Salt er fuldkommen rent og Opløsningen er næsten aldeles farveløs. Iøvrigt viser Opløsningen af Chlornitratet ganske de samme Forhold som det opløste Chloropurpureochlorid. Med Sølvnitrat giver den friskt og koldt tilberedte Opløsning ikke Bundfald før ved Henstand eller Opvarmning.

Chloropurpureochrompentasulfid.



$Cl_2.[Cr_2, 10\ NH_3].\ S_{10}.$

Til en koldt og frisk tilberedt Opløsning af Chloropurpureochloridet sættes Svovlammonium, hvori der er opløst en rigelig Mængde Svovl, og derpaa forsigtig Vinaand, til der netop begynder at vise sig blivende Uklarhed. Naar nu Blandingen staaer hen i en lukket Flaske og i Mørke, saa udskilles snart et musivguldlignende eller ved hurtig Udskilling næsten teglstensrødt Krystalpulver, der under Mikroskopet viser sig som rhombiske Tavler paa 67 til 68^{0} og som smaa

tilsyneladende monokline Pyramider. Bundfaldet vaskes med Vinaand, hvori det er uopløseligt, og tørres over Svovlsyre. Den tørrede Forbindelse lugter stadig svagt af Svovlbrinte, men undergaaer selv ved flere Ugers Henstand over Svovlsyre (i Mørke) ingen synlig Forandring. Allerede ved 100° taber Forbindelsen under stærkere Lugt af Svovlbrinte og Svovl stadig mere i Vægt. Analysen viser, at det over Svovlsyre tørrede og herved ikke forvittrende Salt er vandfrit. Saltet er meget tungt opløseligt i koldt Vand, lettere i varmt med orangegul Farve. Med fortyndet Saltsyre udvikler Saltet Svovlbrinte og udskiller et lyserødt Bundfald, som, efter Vaskning med svag Saltsyre og derpaa med Vinaand, ved Behandling med koldt Vand giver en Opløsning af Chloropurpureochromchlorid (paavist ved Saltsyre, Platinchlorid og Fluskiselsyre). Imidlertid var der her en Mulighed for, at Purpureochloridet kunde være dannet ved Saltsyrens Indvirkning paa oprindeligt Roseochlorid. Derfor har jeg sønderdelt Polysulfidet med Eddikesyre, hvorved udskilles Svovl (som Svovlmælk) og udvikles Svovlbrinte, og i det eddikesure Filtrat paavist Chloropurpureochrom med Platinchlorid og Fluskiselsyre. Chlorofluorsilikatet optræder som det sædvanlige glimrende Bundfald, men dette viser sig her under Mikroskopet næsten udelukkende som rektangulære Tavler (sml. S. 25), dog undertiden med afskaarne Hjørner. I dette Tilfælde har jeg ved Maaling af Vinklerne kunnet konstatere Saltets Identitet.

0,2019 Gm. (tørret over Svovlsyre) gav ved forsigtig Ophedning, hvorved rigelige Svovldampe udviklede sig blandet med Salmiakdampe, og tilsidst ved Ristning (stærk Hede) 0,0463 Cr_2O_3.

0,3787 Gm. (ligl.) blev smeltet med 7 Gm. vandfri Soda og 3,5 Gm. Salpeter, den smeltede Masse opløst i Vand og efter Overmætning med svag Salpetersyre Chloret udskilt som 0,1616 Gm. AgCl. Af Filtratet udskiltes Overskud af Sølv ved svag Saltsyre, og Filtratet afdampedes gjentagne Gange med et stort Overskud af Saltsyre, til al Salpetersyre var fjernet; dernæst udskiltes ved fortyndet Chlorbaryum 1,05 Gm. $BaSO_4$.

0,2643 Gm. gav, ristet ved stærk Hede, 0,0620 Cr_2O_3.

Theori:		Fundet:	
2 Cr	15,77	15,74	15,86
2 Cl	10,66	10,56	
10 S	48,05	47,33 [1])	

Chloropurpureochromdithionat.



$Cl_2 . [Cr_2, 10\ NH_3]. (S_2O_6)_2.$

Den koldt tilberedte Opløsning af Chloridet eller Chloronitratet giver med svovlundersurt Natron ved kort Henstand prægtigt karminrøde, ofte centimeterlange Naale, der under Mikroskopet vise sig som sædvanlig fir- eller sexsidede, ret-afskaarne Prismer. Fældningen er ved et Overskud af svovlundersurt Natron næsten fuldstændig. Saltet maa filtreres fra strax efter at det er udskilt (sml. S. 26). Det er vandfrit. I koldt Vand er det en Gang udskilte Salt yderst tungt opløseligt, langt lettere i varmt. Af den varme Opløsning udskilles det ved langsom Afkøling i tilsyneladende stærkt afskaarne Prismer, sandsynligvis fremkomne ved en ensidig Udvikling af 2 Pyramideflader, thi Krystalformen er sikkert rhombisk. Moderluden fra det af varm Opløsning udskilte Salt er gulrød og indeholder Roseosalt.

0,2545 Gm. efterlod ved Glødning, tilsidst for Blæseren 0,0585 Cr_2O_3.

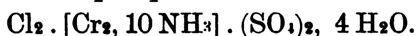
0,4339 Gm. gav, efter Kogning med Natron, osv. 0,1879 AgCl.

0,3803 Gm. gav, efter Opvarmning med Chlornatron (sml. S. 18), hvorved alt Forbindelsens Chrom iltes til Chromsyre, alt dens Svovl til Svovlsyre, og derpaa gjentagen Inddampning med Saltsyre osv., 0,1681 Gm. $BaSO_4$

Theori:		Fundet:
2 Cr	15,77	15,78
2 Cl	10,66	10,72
4 SO_3	48,05	48,66

[1]) At Svovlbestemmelsen er falden for lav ud, kan ligge i, at det ved den anvendte Iltningsmethode ikke har været muligt at undgaae Tab af Svovl; snarere troer jeg dog det har sin Grund i, at Forbindelsen ved Henstand stadig afgiver Spor af Svovl. Imidlertid lader Analysen ingen Tvivl om Forbindelsens Sammensætning.

Chloropurpureochromsulfat.



$Cl_2 . [Cr_2, 10 NH_3] . (SO_4)_2, 4 H_2O$.

Behandles Chloropurpureochromchlorid med frisk fældet Sølvkarbonat og koldt Vand, saa faaes et dybt karminrødt Filtrat, som indeholder Chloropurpureochromkarbonat. Den stærkt alkaliske Opløsning indeholder Chlorsølv opløst, som udskilles ved ganske svag Overmætning med svag Svovlsyre og Henstand. Det er herved vigtigt, at Vædsken ikke er for koncentreret (paa 5 Gm. Chlorid kan passende tages omtr. 150 Ccm. Vædske), da den ellers let samtidig med Chlorsølvet udskiller noget Chlorosulfat. Sætter man til Filtratet fra Chlorsølvet Vinaand, dog ikke mere, end at der endnu ikke fremkommer blivende Bundfald, saa dannes ved Omrøring og Henstand et prægtigt karminrødt Bundfald af Chlorosulfatet i flere Mm. lange Prismer, der under Mikroskopet hyppig vise sig begrændsede af et makrodiagonalt Doma. Saltet vaskes med en Blanding af et Maal Vinaand af 90° T. og 3 Maal Vand. Det taber ikke Vand ved at tørres i Luften[1]), men alt Vand gaaer bort over Svovlsyre eller ved 100°. I koldt Vand opløses Saltet, af et Chloropurpureosalt at være, temmelig let, i varmt meget lettere. Koldtvandsopløsningen fældes ikke af Sølvnitrat før ved længere Henstand eller ved Opvarmning. Den fældes næsten fuldstændig af Fluorsiliciumbrinte under Udskillelse af det charakteristiske Chlorofluorsilikat, der her næsten alene optræder i rene Rhomber.

0,425 Gm. (lufttørt) tabte ved 100° 0,0494 H_2O og efterlod ved Glødning, tilsidst for Blæseren, 0,107 Gm. Cr_2O_3.

0,4194 Gm. (ligl.) vejede efter Tørring over Svovlsyre 0,3707 Gm., efter Tørring ved 100° 0,3700 Gm. Det blev kogt med Natron, Filtratet fra Chromtveiltehydratet fyldt op til 300 Ccm., hvoraf 200 leverede 0,1313 Gm. Ag Cl, medens de øvrige 100 gav 0,1075 Gm. Ba SO_4.

---

[1]) Ved nogle Maaneders Henstand i et lukket Glas ere Krystallerne dog begyndte at blive matte. Som jeg tidligere har vist, forvittrer den analoge Koboltforbindelse yderst let.

Theori:		Fundet:
2 Cr	17,21	17,28
2 Cl	11,64	11,62
4 H_2O	11,80	11,60 11,66

Sættes mere Vinaand til den Vædske, hvoraf man ved Tilsætning af lidt Vinaand og Henstand har faaet det normale Chlorosulfat, saa kan først endnu lidt Chlorosulfat udskilles, men Filtratet herfra, som endnu er temmelig stærkt farvet, kræver næsten ½ Maal Vinaand for at give blivende Uklarhed. Ved Henstand udskilles da et Salt paa Glassets Bund som en mørk karmoisinrød, næsten sort, tyktflydende Olie, der vistnok bestaaer af et Roseosulfat; som bekjendt udskilles Roseokoboltsulfat undertiden ogsaa i denne Form. Efter Frahældning af den ovenstaaende Vædske og Vaskning af den udskilte Olie med Vinaand, er den meget letopløselig i Vand med karmoisinrød Farve. Denne Opløsning fældes ikke af Platinchlorid eller af Natriumkvægsølvchlorid, men jeg skal ved en anden Lejlighed komme nærmere ind paa dens i flere Henseender mærkelige Forhold og her kun bemærke, at den ved Kogning med stærk Saltsyre udskiller næsten alt sit Chrom i Form af Chloropurpureochromchlorid, saa at den Del af dette Salt, der ved ovennævnte Fremgangsmaade ikke faaes som Chlorosulfat, her for største Delen kan vindes igjen.

River man Chloropurpureochromchlorid sammen med koncentreret Svovlsyre, saa faaes under voldsom Chlorbrinteudvikling en Masse, der, selv om der anvendes saa meget Svovlsyre, at Produktet bliver flydende, har Chloropurpureochromsaltenes karminrøde Farve og efter Fortynding med Vand giver disse Saltes sædvanlige Reaktioner med Platinchloridbrinte og Fluorsiliciumbrinte. Dog optræder Chlorofluorsilikatet her hovedsagelig som rektangulære Tavler (sml. ovenfor og S. 25), som dog jævnlig have afskaarne Hjørner og i saa Fald de rigtige Vinkler. Iøvrigt skal Chloridets Forhold til konc. Svovlsyre undersøges nøjere, idet ovennævnte sure Opløsning ved Tilsætning af en ringe Mængde Vinaand og Henstand giver Krystaller, der ere forskjellige fra det normale Sulfat og sikkert bestaae af et

surt Chlorosulfat. At der existerer et Perjodidsulfat, sikkert analogt med Koboltforbindelsen[1]), synes vist, thi Opløsningen af Chloridet i svag Svovlsyre giver med Jod i Jodkalium efter nogen Henstand metalglindsende grønlige, rektangulære Tavler, der ere gjennemsigtige med brungul Farve og virke stærkt polariserende: || den lange Side lys brungul; + meget mørk olivengrønligbrun.

Chloropurpureochromchromat.



$Cl_2. [Cr_2, 10\,NH_3]. (Cr\,O_4)_2.$

Denne Forbindelse, der har en vis Interesse derved, at Chromet deri optræder i to ganske forskjellige Former, faaes let af den koldt tilberedte Opløsning af Chlorochloridet eller endnu bedre Chloronitratet ved Tilsætning af vandigt, normalt chromsurt Kali og Omrøring. Den udskilles da meget snart som et teglstensbrunt, kornet krystallinsk Bundfald, der ikke er fuldt saa tungtopløseligt som det analoge Koboltsalt og derfor under Mikroskopet viser noget tydeligere Krystaller, nemlig smaa rhombiske Tavler, der dog i Almindelighed ikke er meget skarpt begrændsede og stribede parallelt med Rhombens fire Sider. Saltet maa strax filtreres fra (sml. S. 26) og vaskes med koldt Vand. Det er vandfrit, taber ved 100° kun Spor af hygroskopisk Vand og giver ved Glødning den theoretiske Mængde Chromtveilte. Dog foregaaer Sønderdelingen med et Ildfænomen, der imidlertid ikke er meget hæftigt og ved tilstrækkelig Forsigtighed ikke giver Anledning til Tab.

$0{,}_{2545}$ Gm. gav ved Glødning $0{,}_{1846}$ $Cr_2\,O_3$.

$0{,}_{3843}$ Gm. gav, efter Kogning med Natron osv., $0{,}_{1916}$ Ag Cl.

	Theori:	Fundet:
4 Cr	$36{,}_{27}$	$36{,}_{20}$
2 Cl	$12{,}_{26}$	$12{,}_{33}$

Chloropurpureochromoxalat. $Cl_2. [Cr_2, 10\,NH_3]. (C_2\,O_4)_2.$

Af den koldt tilberedte Opløsning af Chloridet udskiller oxalsurt Ammon ved Henstand (i Mørke) og især ved Omrøring næsten alt Chrom i Form af Chlorooxalat. Saltet bestaaer

[1]) K. D. Vid. Selsk. Skr. [5] 12, 105.

næsten udelukkende af retvinklede Prismer af Chlorochloridets Farvenuance og er meget tungtopløseligt i koldt Vand. Det lufttørre Salt er vandfrit.

0,2430 Gm. gav ved Glødning 0,0718 Cr_2O_3.

	Theori:	Fundet:
2 Cr	20,11	20,27

Chloropurpureochromferrocyanid.

Cl_2. [Cr_2, 10 NH_3]. Fe Cy_6, 4 H_2O.

Den koldt tilberedte Opløsning af Chloridet fældes ikke af Ferrocyankalium; ved forsigtig Tilsætning af Vinaand faaes derimod ved Henstand Ferrocyanidet, men da Ferrocyankalium selv saa let fældes af Vinaand, har jeg foretrukket til Fremstillingen at anvende Ferrocyanbrinte i Overskud og tilsætte Vinaand, saalænge det fremkomne Bundfald endnu let opløser sig ved Omrøring. Saasnart Krystallerne have udskilt sig, er det hensigtsmæssigt at frahælde den overstaaende Vædske, da den snart begynder at sønderdeles og derved bliver uklar. Dog kan Dekantatet staae hen i Mørke i 24 Timer til videre Krystaldannelse; det er nu vel svagt uklart, men de udskilte Krystaller kunne let faaes rene ved Dekantation med en Blanding af lige Rumfang Vand og Vinaand, hvormed Saltet uden at forandres kan vaskes. Krystallerne have næsten Roseokoboltsaltenes Nuance og ere smukt glindsende, men næsten altid meget slet udviklede. Under Mikroskopet vise de sig tandede og spydformede og minde paafaldende i Formen om Spyd- og Pilspidser fra Stenalderen. — Det lufttørrede Salt taber kun Spor af hygroskopisk Vand over Svovlsyre; ved 100° afgiver det derimod alt Vand og bliver derved smukt og rent mørkebrunt, men beholder sin Glands. I koldt Vand er Saltet næsten ganske uopløseligt. Overhældes det med Fluskiselsyre, omdannes det meget snart til Chlorofluorsilikatet, der her udskilles i rhombiske smaa Tavler, hvis Vinkler ere meget nær 74° og 106°. Overgydes Saltet med fortyndet Jernchloridopløsning, dannes strax Berlinerblaat. Hermed er det qvalitativt godtgjort, at Forbindelsen er et Ferrocyanid af Chloropurpureochrom.

0,3552 Gm. (lufttørt) gav ved 100° 0,0408 Gm. Vand og efterlod ved Glødning under Luftens Adgang 0,1812 Gm. $Cr_2O_3 + Fe_2O_3$, som smeltet med kulsurt Natron og Salpeter ved Behandling med Vand efterlod et Jerntveilte, der blev opløst i Saltsyre og efter Fældning ved Ammon gav 0,0491 Fe_2O_3.

0,2509 Gm. (tørret over Svovlsyre) tabte ved 100° 0,0285 Gm. Vand, gav ved Glødning 0,0923 Gm. $Cr_2O_3 + Fe_2O_3$ og heri som ovenfor 0,0342 Gm. Fe_2O_3.

0,4215 Gm. (2det Præparat; lufttørt) blev smeltet med Salpeter og Soda. Det vandige Udtræk gav 0,1942 Gm. AgCl. Remanentsen gav som ovenfor 0,0570 Gm. Fe_2O_3.

0,3721 Gm. gav som ovenfor 0,1686 Gm. AgCl.

	Theori:	Fundet:			
$Cr_2O_3 + \frac{1}{2} Fe_2O_3$	36,98	36,93	36,79		
Fe	8,89	9,67	9,54	9,21	
2 Cl	11,27			11,41	11,21
4 H_2O	11,43	11,19	11,36		

At Jernbestemmelserne ere faldne for højt ud, hidrører sikkert fra, at det anvendte glødede kulsure Natron, hvad jeg for sent opdagede, indeholdt et Spor af Lerjord.

Idet jeg slutter dette første Afsnit af mine Undersøgelser over Chromets Ammoniakforbindelser, kan jeg ikke undlade at takke Hr. Cand. mag. *O. Christensen* for den Iver og Beredvillighed, hvormed han har været mig behjælpelig med den, navnlig i Begyndelsen, besværlige Fremstilling af Raamaterialet.

I November 1877.

THERMOCHEMISKE UNDERSØGELSER

OVER

QVÆLSTOFFETS ILTER OG SYRER.

AF

JULIUS THOMSEN.

Det mathem.-naturvidensk. Fakultets Skrifter Nr. 3.

Nærværende Afhandling danner et lille Led i den store Kjæde af Afhandlinger, som jeg i en lang Aarrække fra Tid til anden har offentliggjort, og som alle have det fælleds Formaal, ved Undersøgelse af de Varmephænomener, der ledsage de chemiske Processer, og ved Maaling af de fremtrædende Varmemængder at komme til Kundskab om Beskaffenheden og Størrelsen af de Kræfter, som fremkalde de chemiske Processer. Det store Materiale, som mine Undersøgelser have bragt tilveie, vil i Tidens Løb blive Grundlaget for en Udvikling af de chemiske Processers Dynamik, til hvilken vi for Tiden kun have saare ringe Kjendskab, men som ad Aare vil formindske det stærkt empiriske Præg, som endnu er Chemiens Særkjende, og føre den ind i de mathematiske Videnskabers Række.

Allerede i Aarene 1853 og 1854 søgte jeg i nogle Afhandlinger, som ere trykte i Poggendorffs Annalen der Chemie und Physik Bd. 88 S. 349, Bd. 90 S. 262, Bd. 91 S. 83 og Bd. 92, S. 34, tildeels ogsaa i det Kgl. danske Videnskabernes Selskabs Skrifter 5te Række, 3die Bind, paa Grundlag af de dengang bekjendte Undersøgelser af Abria, Andrews, Dulong, Favre, Silbermann, Hess og Flere, at udvikle Hovedtrækkene af de chemiske Processers Dynamik, og det lykkedes mig at drage forskjellige Slutninger, hvis Rigtighed senere Undersøgelser i alt Væsentligt have bekræftet; men det viste sig tillige, at der i de ældre Undersøgelser vare saa store Uovereensstemmelser og Unøiagtigheder, at Tilveiebringelsen af et heelt nyt Materiale var nødvendig, førend der med Sikkerhed kunde arbeides videre i

denne Retning. Det var mit Ønske at kunne udføre dette Arbeide; men først fra Aaret 1866, da jeg som Professor i Chemi overtog Bestyrelsen af Universitetets chemiske Laboratorium og derved erholdt Raadighed over de for saadanne Undersøgelser fornødne Lokaler og videnskabelige Hjælpemidler, kunde jeg med Tryghed paabegynde denne meget omfangsrige Undersøgelse.

Resultaterne af mine Arbeider har jeg efterhaanden offentliggjort i en Række Afhandlinger med den fælleds Titel: „Thermochemiske Undersøgelser“, der tilsammen ville danne et systematisk ordnet Hele. De første 13 Afhandlinger har jeg ladet trykke i Poggendorffs „Annalen der Physik und Chemie“ (Berlin) og omtrent samtidigt i Det Kgl. danske Videnskabernes Selskabs Skrifter; de derpaa følgende 16 Afhandlinger ere trykte i Kolbes „Journal für praktische Chemie“ (Leipzig). Æmnet for disse Afhandlinger har været følgende:

1ste Afsnit. Neutralisationsphænomener.

I. Undersøgelser over den Berthollet'ske Affinitetstheori (Poggendorffs Annalen Bd. 138 S. 65).
II. Chlor-, Brom-, Jod-, Fluor- og Cyanbrintesyre (Pogg. Ann. Bd. 138 S. 497).
III. Svovlsyre, Svovlsyrling, Svovlundersyre, Selensyre og Selensyrling (Pogg. Ann. Bd. 138 S. 514).
IV. Borsyre, Kiselsyre, Titansyre, Tinsyre, Chlorplatinbrinte- og Fluorsiliciumbrintesyre (Pogg. Ann. Bd. 139 S. 193).
V. Salpetersyre, Ortho-, Para- og Metaphosphorsyre, Phosphorsyrling, Phosphorundersyrling og Arsensyre (Pogg. Ann. Bd. 140 S. 88).
VI. Myresyre, Eddikesyre, Oxalsyre, Ravsyre, Viinsyre og Citronsyre (Pogg. Ann. Bd. 140 S. 497).
VII. Chromsyre, Kulsyre og Svovlbrintesyre (Pogg. Ann. Bd. 140 S. 513).
VIII. Oversigt over Syrernes Neutralisationsvarme (Pogg. Ann. Bd. 140 S. 531).

IX. Undersøgelser over Varmefylden af vandige Opløsninger (Pogg. Ann. Bd. 142 S. 337).

X. Basernes Neutralisationsvarme (Pogg. Ann. Bd. 143 S. 354—396 og S. 497—534).

A. Lithion, Natron, Kali, Thalliumilte, Baryt, Strontian, Kalk og Ammoniak. S. 356.

B. Magnesia, Manganilte, Nikkelilte, Kobaltilte, Jernforilte, Kadmiumilte, Zinkilte og Kobbertveilte. S. 377.

C. Beryljord, Leerjord, Jerntveilte. S. 497.

D. Blyilte, Qvægsølvilte, Sølvilte, Guldilte. S. 508.

E. Nogle organiske Baser.

F. Schematisk Sammenstilling af Resultaterne med Hensyn til Syrernes og Basernes Neutralisationsvarme.

Til disse Afhandlinger over Neutralisationsphænomenerne slutter sig nogle senere tilkomne: nemlig „Om Neutralisationen" (Journal für praktische Chemie, [2] Bd. 13 S. 241); „Om Arsensyrling" (Berichte der chemischen Gesellschaft zu Berlin, Bd. 7 S. 935); „Om Jodoversyre" (ibid. Bd. 6 S. 2) og „Om Cerium-, Lanthan-, Didym-, Erbium- og Yttriumilte" (ibid. Bd. 7 S. 31).

2det Afsnit. Affinitetsphænomener imellem Metalloiderne indbyrdes.

XI. Brintens Affinitet til Chlor, Brom, Jod, Ilt, Svovl, Qvælstof og Kulstof.

a. Chlor-, Brom- og Jodbrinte (Pogg. Ann. Bd. 148 S. 177).

b. Vand, Svovlbrinte, Ammoniak, Æthylen og Acetylen (Ibid. S. 368).

XII. Iltnings- og Reductionsphænomener (Pogg. Ann. Bd. 150 S. 31).

XIII. Fortsættelse (ibid. Bd. 151, S. 194). Chlorundersyr-

ling, Jodsyre, Tinchlorüre, Brintoverilte, manganoversuurt Kali og Jernchlorüre.

XIV. Iltens Affinitet til Chlor, Brom og Jod (Journal für praktische Chemie, [2] Bd. 11 S. 133), Chlorundersyrling, Chlorsyre, Bromsyre, Jodsyre og Jodoversyre.

XV. Iltens Affinitet til Phosphor og Arsen (Journ. f. pr. Ch. Bd. 11 S. 152); Phosphorsyre, Phosphorsyrling, Phosphorundersyrling, Arsensyre og Arsensyrling.

3die Afsnit. Affinitetsphænomener imellem Metaller og Metalloider (Ilt, Chlor, Brom og Jod).

XVI. Lithium, Kalium, Natrium, Magnium, Aluminium (Journ. f. pr. Ch. [2] Bd. 11 S. 233).

XVII. Qvægsølv (ibid. Bd. 11 S. 261).

XVIII. Mangan, Zink, Kadmium og Jern (ibid. Bd. 11 S. 402).

XIX. Bly og Thallium (ibid. Bd. 12 S. 85).

XX. Kobber og Sølv (ibid. Bd. 12 S. 271).

XXI. Guld (ibid. Bd. 13 S. 337).

XXII. Kobalt og Nikkel (ibid. Bd. 14 S. 413).

XXIII. Tin (ibid. Bd. 14 S. 429).

XXIV. Platin og Palladium (ibid. Bd. 15 S. 435).

XXV. Magnium, Calcium, Strontium og Baryum (ibid. B. 16 S. 97).

4de Afsnit. Opløsningsphænomener og Hydratdannelse.

XXVI. Chlor-, Brom- og Jodforbindelsernes Opløsningsvarme (Journ. f. pr. Ch. [2] Bd. 16 S. 323).

XXVII. Saltenes Opløsningsvarme (ibid. Bd. 17 S. 165).

XXVIII. Vandholdige Saltes Constitution (ibid. Bd. 18 S. 1).

XXIX. Metallernes Affinitet til Svovl (Journ. f. pr. Ch. [2] Bd. 19 S. 1).

Nærværende Afhandling slutter sig nærmest til det 2det Afsnit, som omhandler Metalloidernes gjensidige Affinitet, og Størstedelen af det experimentale Materiale var derfor ogsaa færdigt for 7 Aar siden, idet kun en enkelt Bestemmelse endnu manglede, nemlig en Maaling af Affinitetens Størrelse i Forbindelsen NO, til hvis Opnaaelse der først skulde indrettes nye Apparater; da jeg for c. 3 Aar siden fik udført de manglende Forsøg, havde jeg allerede paabegyndt Offentliggjørelsen af den lange Række af Afhandlinger over Metallernes Affinitetsforhold, som jeg ikke ønskede at afbryde. Jeg benytter nu den Leilighed, som Udgivelsen af Universitetets Festskrifter frembyder, til at offentliggjøre dette Arbeide, i hvis experimentale Deel meget forskjelligartede Methoder og Apparater ere komne til Anvendelse, og som derfor særligt egner sig til at give et fyldigt Indblik i de thermochemiske Arbeiders ofte meget vanskelige og besværlige Beskaffenhed.

Undersøgelser over Qvælstoffets Ilter og Syrer.

Den Fremgangsmaade, som jeg har benyttet for at maale de Varmetoninger, som ledsage Dannelsen af Qvælstoffets Iltforbindelser og Syrer, er i Hovedtrækkene følgende: Qvælstoftveilte blev iltet til Salpeterundersyre ved Hjælp af fri Ilt; den dannede dampformige Salpeterundersyre blev dernæst ledet i Vand, af hvilket den optages og adskilles i Salpetersyrling og Salpetersyre; den saaledes dannede Opløsning blev endelig iltet med Chlor eller med manganoversuurt Kali. Varmetoningen, som ledsager enhver af disse Processer, blev maalt, og af den lader sig Dannelsesvarmen for Salpetersyrling, Salpeterundersyre og Salpetersyre beregne, naar disse Stoffer tænkes dannede af Qvælstoftveilte som Radikal. Dannelses-

varmen af selve dette Radikal blev dernæst bestemt ved Adskillelsen af salpetersyrlet Ammoniak under Varmens Indvirkning, hvorved Stoffet deles i Qvælstof og Vand. Endeligt blev Qvælstofforiltets Dannelsesvarme maalt ved et særligt Forsøg, i hvilket Forbindelsen blev adskilt i dens Bestanddele ved Opvarmning.

A. Adskillelse af salpetersyrlet Ammoniak i Qvælstof og Vand.

Varmetoningen ved Adskillelsen af salpetersyrlet Ammoniak ved Opvarmning blev for nogle Aar siden maalt af Hr. Berthelot, og efter denne Bestemmelse skulde Adskillelsen af 1 Molecul NO_2NH_4 i N_2 og 2 H_2O være ledsaget af en Varmeudvikling af 80400^c. De hertil svarende Forsøg, som ere beskrevne i Ann. de chimie et de physique, 5te Serie, Bd. 5 S. 17 og Bd. 6 S. 159, kunne imidlertid ikke gjøre Fordring paa stor Nøiagtighed, hvilket jeg strax nærmere skal paavise.

Forsøget blev nemlig udført af Hr. Berthelot paa den Maade, at en concentreret Opløsning af salpetersyrlet Ammoniak, som befandt sig i et lille Rum i den indre Deel af Calorimetret, blev opvarmet og adskilt ved Berøring med varmt Vand, som førtes ind i Calorimetret. Afhandlingen indeholder ikke nogen Angivelse af de originale Iagttagelser, men kun det for hvert Forsøg beregnede Resultat og den beregnede Vægt af det adskilte Salt, nemlig:

1ste Forsøg ..	78200^c	Adskilt Salt	0,277	Gramm.
2det — ...	80400	—	0,890	—
3die — ...	76800	—	0,274	—
4de — ...	81200	—	0,138	—

Endvidere fremgaaer det af Afhandlingen, at Calorimetret har indeholdt omtrent 800 Gr. Vand, og at Opvarmningen er bleven frembragt ved at bringe 25 Gramm til omtrent 90° opvarmet Vand ind i Calorimetret.

Da nu 1 Molecul eller 64 Gr. af Saltet NO_2NH_4 ved Adskillelsen frembringer 22290 Cubikcentimeter Qvælstof, kan man

beregne deels den Mængde Qvælstof, som er bleven udviklet i hvert Forsøg, deels den Varmemængde, som Calorimetret ved Adskillelsen af Saltet har modtaget. Man finder da

for det 1ste Forsøg...	97cc	Qvælstof og	346	Varmeeenheder,
2det — ...	309	— -	1112	—
3die — ...	96	— -	342	—
4de — ...	48	— -	172	—

Den Varmemængde, som Hr. Berthelot tilførte Calorimetret for at fremkalde Adskillelsen, udgjorde 25 Gramm Vand opvarmet til omtrent 90° eller omtrent 2200 Varmeeenheder. Det fremgaaer heraf, at i det heldigste Tilfælde, nemlig i det 2det Forsøg, har den udenfra tilførte Varmemængde været omtrent dobbelt saa stor som den, der blev frembragt ved den chemiske Proces, medens i de andre 3 Forsøg den udenfra tilførte Varmemængde var 6 til 12 Gange saa stor som den, der ved Forsøget skulde maales. Under saadanne Forhold er det vanskeligt at opnaae et kun nogenlunde nøiagtigt Resultat, idet enhver lille Unøiagtighed vil faae en betydelig Indflydelse paa den Størrelse, som søges. Da endvidere Vægten af det adskilte Salt i et Forsøg udgjorde 1/70 Molecul, i de andre kun 1/230 til 1/460 Molecul, er det klart, at ringe Unøiagtigheder i Maalningen blive stærkt forøgede, naar Resultatet skal beregnes for et Molecul.

Hr. Berthelot har følt Tilstedeværelsen af disse uheldige Forhold, idet han som endeligt Resultat kun benytter den ved det 2det Forsøg fundne Værdi; men derved reduceres Paalideligheden af Resultatet til Nøiagtigheden af det ene Forsøg, i hvilket den tilførte Varmemængde var dobbelt saa stor som den, der skulde maales, og hvis Resultat maa multipliceres med 70 for at give Varmetoningen for eet Molecul. Jeg ansaae det derfor for nødvendigt at foretage Maalingen af den omtalte Varmetoning ved Forsøg, der frembyde bedre Betingelser for Opnaaelsen af et nøiagtigt Resultat end de omtalte.

I mine Forsøg blev ligeledes en concentreret Opløsning af Saltet adskilt ved Opvarmning; men istedetfor at anvende varmt

Vand til Opvarmningen, saaledes som Hr. B. havde gjort, blev Opvarmningen frembragt ved en lille Brintflamme. Paa denne Maade blev det muligt stedse at tilføre Calorimetret den samme Varmemængde og samtidigt at indskrænke denne til et Minimum. Medens den udenfra tilførte Varmemængde i Hr. Berthelots Forsøg udgjorde fra 2 til 16 Gange den Varmemængde, som skulde maales, var den i mine Forsøg kun 1/3 til 1/2, og altsaa var den i disse Forsøg til Opvarmning benyttede Varmemængde kun 1/6 til 1/24 af den, som Hr. Berthelot maatte anvende for at fremkalde en ligesaa stærk Adskillelse. Fremdeles udgjorde den udviklede Qvælstofmængde i mine Forsøg fra 442 til 766 Cubikcentimeter, medens Hr. B. kun i eet Forsøg opnaaede 300, i de andre 3 Forsøg derimod under 100 Cubikcentimeter[1]). Constructionen af mit Apparat var saadan, at jeg med Lethed kunde udføre et større Antal af Forsøg, medens Hr. Berthelots Apparat maatte sønderbrydes for hvert Forsøg, og factisk har Hr. B. kun et enkelt Forsøg at støtte sig til.

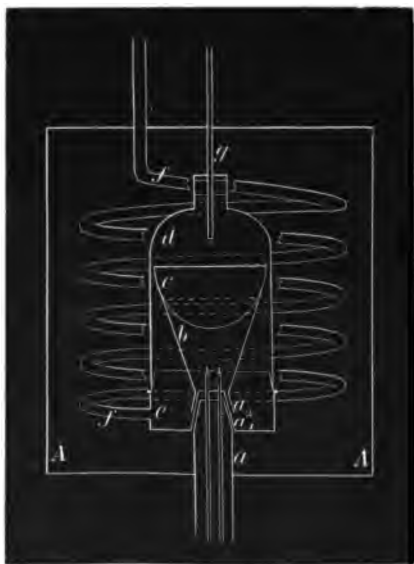


Fig. 1.

Det af mig for denne og lignende Undersøgelser construerede calorimetriske Apparat er i dets Hovedtræk gjengivet i Figur 1. AA er et cylindrisk Kar af tyndt Messingblik, der rummer 2 Liter; det anbringes ved Forsøgene i den dobbelte Metalkapsel, som jeg tidligere har beskrevet, og som tjener til at skjærme det calorimetriske Kar mod Varmeindvirkninger udenfra. I Bunden af dette Kar er loddet et kort Metalrør *a*, som er aabent i begge Ender, men hvis øverste

[1]) I den citerede Afhandling 5te Bind S. 26, hvor Apparatet beskrives, meddeler Hr. Berthelot, at det er nødvendigt at arbeide paa den Maade, at

Ende er conisk tilslebet. Paa denne Conus er den øvrige Deel af Calorimetret, der helt er dannet af tyndt Platinblik, anbragt saaledes, at det let kan løsnes fra Røret *a*, men dog slutter lufttæt til samme; dette opnaaes derved, at det coniske Mundstykke a_1 er slebet sammen med Enden af Røret *a*. Paa det coniske Mundstykke a_1 er der anbragt et andet conisk Rør *b*, paa hvis øverste brede Rand en tynd Platinskaal *c* er loddet lufttæt, medens dets nederste Ende danner et conisk Mundstykke a_2, som slutter lufttæt til a_1 saaledes, at det kegleformede Rum *b* danner en overalt lufttæt afsluttet Forlængelse af Røret *a* og ikke staaer i Forbindelse med Calorimetrets øvrige Dele. Det kegleformede Rum *b* danner Varmekammeret, i hvilket en lille med reen Ilt næret Brintflamme brænder; den ringe Mængde Vanddamp, som dannes ved Brintens Forbrænding, og som i hvert Forsøg kun udgjør omtrent 0,2 Gramm., fortættes paa Inderfladen af Røret *a*, som udvendigt er i Berøring med Calorimetrets store Vandmængde; det fortættede Vand udgjør omtrent 3 Draaber. De til Opvarmningen fornødne Luftarter føres ind i Rummet *b* igjennem tynde og snevre Glasrør, i hvis Munding tynde Platinrør ere indsmeltede.

Varmekammeret *b* og den dertil loddede Platinskaal *c*, i hvilken Adskillelsen af det salpetersyrlede Ammoniaksalt skal foregaae, omsluttes af det cylindriske, foroven kugleformet afrundede, ligeledes af tyndt Platinblik forarbeidede Kar *d e*, der forneden ender i det kegleformede Mundstykke a_1 og heelt udelukker *b* og *c* fra Berøring med Vandet i Beholderen *AA*. Karret *d e* har to Aabninger; forneden er ved *e* paaloddet et spiralformet Rør af tyndt Platinblik, *ff*, som foroven træder ud af Calorimetret, og som er bestemt til at føre de Luftarter, der udvikles ved den chemiske Proces, til Opsamlingsapparatet, efterat de have afgivet deres Varme til det Spiralrøret omgivende Vand; foroven har Karret *d e* en Tubus, og i denne er anbragt et Rør, gjennem hvilket den Vædske kan indføres,

Qvælstofmængden mindst udgjør 500cc; men i den 2den Afhandling 6te Bind S. 160, hvor Forsøgene meddeles, findes kun de ovenomtalte 4 Forsøg, hvoraf kun eet har givet 300cc, de andre under 100cc.

som skal decomponeres i Karret *c*. Røret *g* er ovenfor Calorimetrets Laag forsynet med en Hane og er hinsides denne udvidet til en Beholder for den Vædske, som skal tilføres Karret *c*.

Til Bestemmelsen af den ved det salpetersyrlede Ammoniaksalts Decomposition fremtrædende Varmemængde ere følgende Maalinger fornødne: 1) af den ved Brintens Forbrænding tilførte Varmemængde; 2) af den hele Varmemængde, som Calorimetret modtager ved et Decompositionsforsøg, og 3) af Decompositionens Omfang. Fremgangsmaaden var følgende:

1. Maaling af den ved Brintens Forbrænding tilførte Varmemængde. Ved de af mig allerede tidligere beskrevne Gasbeholdere (Poggendorffs Annal. Bd. 142, Tafel VII., MN), og som i vedføiede Fig. 2, der giver en Skitse af det hele

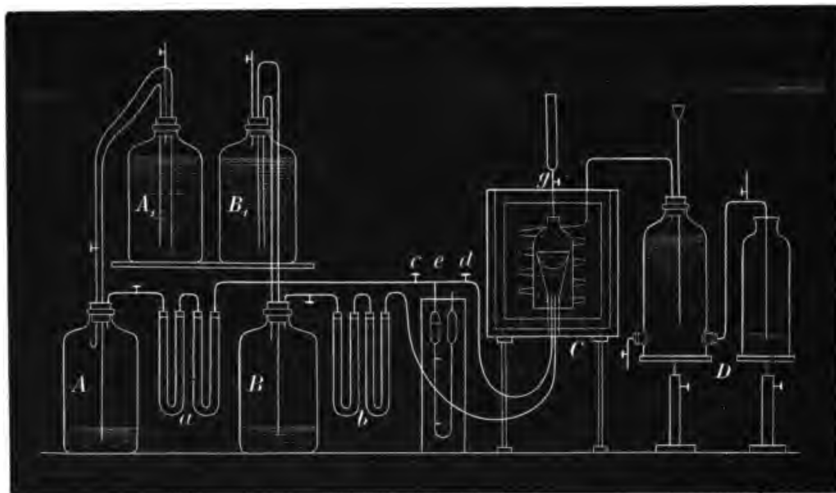


Fig. 2.

Apparat, ere betegnede med AA^1 og BB^1, kan man med Lethed opnaae en fuldkomment regelmæssig Luftstrøm af bestemt Hastighed; men da der ved disse Forsøg kun er Brug for en meget svag Luftstrøm, idet en Forbrænding af omtrent 70 Cubikcentimeter Brint i Minutet giver en passende Varmemængde, blev der paa Ledningen for Brintstrømmen ved *c* og *d* anbragt tvende smaa Glashaner, og ved *e* en følsom Trykmaaler, som

tillader at maale Tiendedele Millimeter Vandtryk. Man regulerer Brintens Udstrømning, idet man stiller Hanerne *c* og *d* saaledes, at deels Brintstrømmen faaer den forlangte Styrke, deels Trykmaaleren viser et Overtryk af omtrent 200 Millimeter af dens vilkaarlige Eenhed. Naar dette Forhold er naaet, lader man Hanen *d* forblive uforandret under Forsøgene og regulerer mulige smaa Differenser i Trykket ved Hjælp af Hanen *c*, hvilket meget let kan skee. Naar Modstanden, som Luftstrømmen møder i Hanen *d*, er stor i Sammenligning med Modstanden fra *d* til Ledningens Ende, vil den gjennemstrømmende Luftmængde ved uforandret Temperatur og Lufttryk kun være afhængig af Differenstrykket ved *e*, som holdes constant, og det bliver paa denne Maade muligt i de forskjellige Forsøg netop at føre den samme Mængde Brint til Calorimetret i en given Tid.

Den til Brintens Forbrænding fornødne Ilt kommer fra en anden Beholder *B* med constant Udstrømningshastighed. Iltstrømmen reguleres saaledes, at Brinten fuldstændigt kan forbrænde. Udstrømningsrørene for Ilt og Brint er befæstede tæt til hinanden i en Prop, som tillige tjener til at befæste den hele Brænder i Mundingen af Røret *a* (Fig. 1). Reguleringen af Iltstrømmen skeer lettest, idet man fører Brænderen med antændt Brintflamme ind i et foroven lukket snevert Glasrør, hvor da Brinten skal kunne vedblive at brænde i den tilførte Ilt.

Naar nu Ilt- og Brintstrømmene ere regulerede, Calorimetret fyldt med Vand og dets Varmegrad aflæst, bliver Brinten antændt udenfor Calorimetret; man iagttager Trykmaaleren for at overtyde sig om, at ingen Forandring er indtraadt, og naar Secunduhret angiver det fulde Minut, føres Brænderen og det dermed forbundne iltførende Rør gjennem Aabningen af Røret *a* ind i Calorimetret. Efter nøiagtigt 3 Minuters Forløb afbrydes Brintstrømmen, og naar 2—3 Minuter senere Temperaturdifferenserne ere udjevnede, aflæses Vandets Varmegrad. Man fjerner dernæst Vandet fra Calorimetret, fylder det paany med Vand af passende Varmegrad og gjentager Forsøget flere Gange. Middeltallet af de ved disse Forsøg iagttagne Temperatur-

stigninger i Calorimetret, der kun afvige nogle Tusindedele af en Grad, giver da den Opvarmning, som Calorimetret lider ved Brintflammens Indvirkning.

2. Maaling af den ved det salpetersyrlede Ammoniaksalts Adskillelse fremtrædende Varmemængde. De ovenfor omtalte Forsøg gjentages ganske paa samme Maade, kun med den Forskjel, at der før Forsøgets Begyndelse bringes omtrent 1 Cubikcentimeter af en concentreret Opløsning af Saltet i Platinskaalen *c*. Naar alle Dele af Calorimetret ere samlede, dette forbundet med Luft-Opsamlingsapparatet *D*, og Temperatur osv. ere aflæste, bliver Varmekilden ført ind i Calorimetret ligesom tidligere beskrevet. Efter ½—1 Minuts Forløb begynder Decompositionen af Saltet, hvilket giver sig tilkjende ved den stedfindende Luftudvikling; man aabner nu Hanen *g* saameget, at den over samme værende concentrerede Opløsning af Saltet kan falde draabeviis ned i Skaalen *c*, idet man iagttager det forbrugte Rumfang Vædske, da dette senere skal drages fra den udviklede Lufts tilsyneladende Rumfang; nogle Cubikcentimeter Vædske er tilstrækkeligt til hvert Forsøg. Nøiagtigt efter 3 Minuters Brændetid afbrydes Brintstrømmen. Efter et Par Minuters Forløb ere Temperaturdifferenserne udjevnede under den stadige og automatiske Bevægelse af Blandingsapparatet, og man aflæser da Vandets Varmegrad. Naar man fra den iagttagne Temperaturforhøielse drager den, som ifølge de foregaaeede Forsøg svarer til den ved Brintens Forbrænding frembragte Varmemængde, erholdes den Temperaturforhøielse, som skyldes den ved den chemiske Proces udviklede Varmemængde.

3. Mængden af det decomponerede Salt beregnes af det udviklede Qvælstofs Rumfang, efter at dette er reduceret for Temperatur, Tryk og Dampspænding. Maalingen af Qvælstofmængden skeer ved Veining af den Vandmængde, som den kan fortrænge af den lukkede Beholder *D*, idet tilbørligt Hensyn tages til Varmegrad og Trykforhold.

Forsøgenes Enkeltheder.

De forskjellige Dele af Calorimetret svare tilsammen til 73,5 Gramm. Vand; Calorimetret fyldes med 1800 Gr. Vand, og det svarer altsaa ialt til 1873,5 Gr. Vand. Betegner nu d Temperaturforøgelsen i Decompositionsforsøgene, d^1 den Deel af denne, som svarer til den ved Brintens Forbrænding fremkomne Varme, saa er $(d-d^1) \cdot 1873{,}5$ den Varmemængde, som skyldes Decompositionen af det salpetersyrlede Ammoniaksalt. Da fremdeles 1 Mol. $NO^2\,NH^4$ ved Adskillelse i Qvælstof og Ilt giver 1 Mol. Qvælstof, og dette ved 0° og 760 Mm. Tryk har et Rumfang af 22290 Cubikcentimeter, naar 1 Atom Brint sættes til 1 Gr., vil Varmemængden, som svarer til Adskillelsen af 1 Molecul af Saltet, blive

$$R = \frac{(d-d^1).\ 1873{,}5.\ 22290}{V_0}.$$

naar V_0 betegner Rumfanget af det udviklede Qvælstof i tør Tilstand ved 0° og 760 Mm. Tryk.

Det reducerede Volumen V_0 beregnes af det fundne Volumen V ved den bekjendte Formel

$$V_0 = V.\ \frac{B - b}{760}.\ \frac{1}{1 + a\,t}$$

idet B er Lufttrykket og b Dampspændingen i Millimetre ved Luftens Varmegrad t; Luftens Udvidelsescoefficient er betegnet ved a.

1ste Forsøgsrække.

Forsøg til Maaling af den ved Brintens Forbrænding tilførte Varmemængde. Forsøgene bleve udførte paa den ovenfor omtalte Maade; Brintflammen brændte i hvert Forsøg i 3 Minuter; T betegner Værelsets Varmegrad, t_1 og t_2 Calorimetrets Varmegrad før og efter Forsøget.

T	t_1	t_2	d^1	
19,5	18,600	18,975	0,375	0,378
19,5	18,985	19,365	0,380	
19,5	19,365	19,745	0,380	
19,5	19,745	20,120	0,375	

I tre Minutter forhøier altsaa Brintflammen Calorimetrets Varmegrad med 0,378 Grader, og ligesaa stærk Opvarmning vil den altsaa frembringe i samme Tid ved Decompositionsforsøgene, hvis Enkeltheder ere følgende.

Decompositionsforsøgene. I disse varede Opvarmningen ligeledes 3 Minuter, undtagen i Forsøg No. 1515, da Opvarmningen blev udstrakt til 6 Minutter for at give et stort Rumfang Qvælstof. Ligesom ovenfor betegner T Værelsets Varmegrad, medens t_a og t_b betegne Calorimetrets Varmegrad før og efter Forsøget.

No.	T	t_a	t_b	d	d^1	$d-d^1$
1511	19,6	19,112	20,505	1,393	0,378	1,015
1512	19,6	18,985	20,190	1,205	0,378	0,827
1513	19,0	18,265	19,745	1,480	0,378	1,102
1514	18,8	17,925	19,410	1,485	9,378	1,107
1515	19,8	18,865	20,875	2,010	0,756	1,254

Rumfanget af det udviklede Qvælstof udgjorde i de enkelte Forsøg følgende Størrelse i Cubikcentimetre:

	t	B	V	V_0
i Forsøget No. 1511	20,0	757,5	618,9	561,5
- — - 1512	20,0	757,5	505,5	458,6
- — - 1513	19,5	757,5	670,9	610,2
- — - 1514	20,0	757,5	680,6	617,5
- — - 1515	20,1	757,5	766,2	694,9

Betegnelsen af Bogstaverne er givet ovenfor; V_0 er altsaa det til 0° og 760 Mm. reducerede Rumfang tørt Qvælstof.

2den Forsøgsrække.

Maaling af Brintens Forbrændingsvarme. Brintflammen brændte ligesom ovenfor i 3 Minuter, men Trykreguleringen var lidt forskjellig fra den i den 1ste Forsøgsrække.

T	t_1	t_2'	d^1	
20,0	20,105	20,475	0,370	0,368
20,0	19,835	20,200	0,365	
20,0	19,975	20,345	0,370	
20,0	19,335	19,703	0,368	

Opvarmningen ved Brintflammen udgjør altsaa for denne Indstilling af Apparatet 0,368 Grader for 3 Minuter.

Decompositionsforsøgene varede ligeledes 3 Minuter og gave følgende Temperaturstigninger:

No.	T	t_a	t_b	d	d^1	$d-d^1$
1516	20,4	19,650	20,750	1,100	0,368	0,732
1517	20,4	19,385	20,700	1,315	0,368	0,947
1518	20,5	19,235	20,585	1,350	0,368	0,982

Rumfanget af det i disse Forsøg udviklede Qvælstof udgjorde i Cubikcentimeter:

	t_1	B	V	V_0
I Forsøget No. 1516	20,2	758,0	442,6	401,5
- — - 1517	20,2	758,0	579,4	525,6
- — - 1518	20,2	758,0	598,4	542,8

Af den Temperaturstigning, $d-d^1$, som skyldes den chemiske Proces, og det reducerede Qvælstofrumfang V_0, som angiver Mængden af det decomponerede Salt, findes nu efter den ovenfor udviklede Formel

$$R = \frac{(d-d^1) \;.\; 1873{,}5 \;.\; 22290.}{V_0}$$

Varmeudviklingen ved Decompositionen af 1 Molecul af Saltet, nemlig:

	d—d'	V_0	R
I Forsøget No. 1511	1°,015	561,5cc	75480c.
- — - 1512	0 ,827	458,6	75300
- — - 1513	1 ,102	610,2	75410
- — - 1514	1 ,107	617,5	74860
- — - 1515	1 ,254	694,9	75420
- — - 1516	0 ,732	401,5	76140
- — - 1517	0 ,947	525,6	75240
- — - 1518	0 ,982	542,8	75550
Middeltal...........	0°,996	551,6cc	75420c.

I Gjennemsnit har altsaa Opvarmningen, som den chemiske Proces har frembragt, udgjort 0°,996 for hvert Forsøg, medens Brintens Forbrænding kun har medført en Opvarmning af 0°,373; Rumfanget af udviklet Qvælstof har i Gjennemsnit udgjort 551,6 Cubikcentimeter i hvert Forsøg, og Varmeudviklingen, som svarer til hvert Molecul decomponeret Salt, har udgjort 75420°. Denne Bestemmelse kræver dog endnu tvende Berigtigelser.

Qvælstofluften træder ud af Calorimetret i fugtig, med Vanddampe fuldt mættet Tilstand; ved den latente Varme, som Dampen medfører, lider Calorimetret et Tab af Varme; dette udgjør ved en Lufttemperatur af 20° for hvert Molecul Luft (22290cc Qvælstof) ialt 250 Varmeeenheder, og Varmeudviklingen ved Decompositionen af 1 Molecul Salt har altsaa været

$$75420^c + 250^c = 75670^c.$$

Denne Værdi svarer til Adskillelsen af en concentreret Opløsning af salpetersyrlet Ammoniak, der indeholder 7,66 Gramm Salt mod 6 Gramm Vand. Vil man bestemme det tørre Salts Adskillelsesvarme, er det nødvendigt at tage Hensyn til Varmetoningen ved Opløsning af Saltet i denne ringe Vandmængde;

ved et særskilt Forsøg fandt jeg Størrelsen at være — 3900[c] for 1 Molecul af Saltet. Varmetoningen ved Adskillelsen af det faste, tørre Salt bliver da Summen af 75670 og — 3900[c] eller

$$-(N^2, 2\,H^2O) = 71770^c$$

d. v. s. naar 1 Molecul salpetersyrlet Ammoniak, $NO^2.NH^4$, adskilles i Vand og Qvælstof, ledsages denne Adskillelse af en Varmeudvikling, som udgjør 71770[c]. Dannelsen af det nævnte Salt af Qvælstof og Vand vilde derfor, dersom den var mulig, være ledsaget af en ligesaa stærk Varmeabsorption. Imedens jeg har fundet Værdien 71770[c], har Hr. Berthelot fundet 80400[c]; men hans Methode er usikker, og Tallet kun Resultat af et enkelt Forsøg, saa at den af ham angivne Værdi sikkert er altfor høi. Jeg skal kun tilføie, at jeg for at indøve mig i Anvendelsen af det nye Apparat, som jeg særligt havde ladet forfærdige til dette Brug, udførte ikke mindre end 14 Forsøg dermed, førend jeg skred til de endelige Forsøg, som jeg ovenfor har meddeelt. Middeltallet af de umiddelbare Resultater var i hine 14 Forsøg 75910[c], medens de her meddelte Forsøg gave 75420[c]; men hine kunne som Prøveforsøg selvfølgeligt ikke gjøre Fordring paa saa stor Nøiagtighed som disse.

Varmetoningen ved det salpetersyrlede Ammoniaks Dannelse af dets Grundbestanddele findes efter Formlen

$$(N^2, H^4, O^2) = 2\,(H^2, O) + (N^2, 2\,H^2O),$$

og da ifølge mine tidligere meddelte Forsøg

$$(H^2, O) = 68360^c,$$

bliver

$$(N^2, H^4, O^2) = 64950^c.$$

Da Opløsningsvarmen for dette Salt efter Hr. Berthelots Maaling udgjør — 4750[c], bliver

$$(N^2, H^4, O^2, Aq) = 60200^c,$$

hvilket altsaa er Dannelsesvarmen for Saltet i vandig Opløsning.

B. Iltning af Qvælstoftveilte til Salpeterundersyre og Adskillelse af Salpeterundersyre ved Vand.

Qvælstoftveilte og Ilt forene sig directe og ved almindelig Varmegrad til Salpeterundersyre; Phænomenet er en ligefrem Forbrænding uden forudgaaende Antændelse. Varmemængden, der ledsager denne Iltning, kan derfor maales ganske paa samme Maade og ved det samme Apparat, som jeg har benyttet til at maale Vandets og Chlorbrintens Dannelsesvarme, og som jeg har beskrevet og afbildet i Pogg. Annal. Bd. 148 S. 180.

Et kugleformet Kar af Platin, af omtrent 500 Cubikcentimeters Størrelse, danner det egentlige Forbrændingsrum, der overalt er omgivet af Calorimetrets Vandmasse. De tørre Luftarter, Ilt og Qvælstoftveilte, føres med forud reguleret Hastighed fra de af mig tidligere beskrevne Gasbeholdere med constant Udstrømning gjennem særskilte, tæt til hinanden sluttende, parallele Rør ind i det nævnte Platinkar, hvor Foreningen foregaaer. Den udviklede Varme afgives til den omgivende Vandmasse, og det dannede Product, Salpeterundersyre, som ved Calorimetrets Varmegrad er dampformigt, føres gjennem et Rør af meget tyndt Platinblik ud af Calorimetret til det Absorptionsapparat, som skal tjene til at maale Mængden af den dannede Salpeterundersyre.

I den ene Forsøgsrække blev den dannede dampformige Salpeterundersyre ledet i et med Vand fyldt Absorptionsapparat, i hvilket den efter Forsøgets Slutning blev iltet ved fri Ilt, der blev tilført saalænge, som Absorptionsapparatet endnu tiltog i Vægt. Paa denne Maade iltes Salpeterundersyren fuldstændigt til Salpetersyre, og Vægtforøgelsen af Absorptionsapparatet angiver da den Vægt af Salpetersyreanhydrid, som svarer til den absorberede Mængde Salpeterundersyre.

Apparatet er skitseret i Fig. 3. AA_1 og BB_1 ere de tvende Gasbeholdere med Ilt og Qvælstoftveilte; gjennem Tørreapparaterne *a* og *b* træde Luftarterne til Calorimetret *C*, i hvis Platinbeholder *c* de forene sig med hinanden. Producterne føres da igjennem Absorptionsapparatet *D*, og den ikke

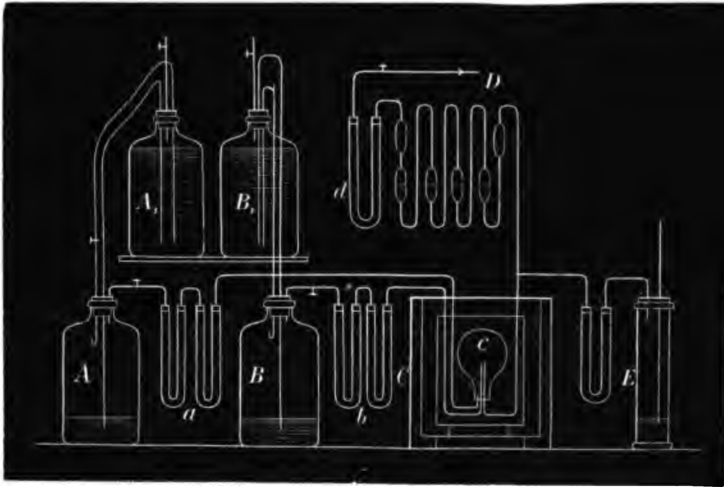


Fig. 3.

optagne Ilt træder ud igjennem Tørreapparatet *d*. Absorptionsapparatet *D* er heelt af Glas uden Forbindelsesled. Fra *d* fører en Ledning til Aspiratoren, hvis Sugning kan reguleres ved en Hane, og som tjener til at overvinde Modstanden i Absorptionsapparatet, saaledes at Trykket i Calorimetrets Beholder *c* er svagt negativ, hvilket fuldstændigt opnaaes ved Apparatet *E*, i hvilket Trykket kan iagttages, og som tillader tør atmosphærisk Luft at træde til, naar Aspiratorens Sugning bliver for stærk. De øvrige Dele af Calorimetret, saasom Blandings- og Bevægelsesapparat, Thermometer og Kikkert ere udeladte i Tegningen.

Calorimetret med alle Metaldele osv. svarer til 2460 Gramm Vand. Betegner nu

T Luftens Varmegrad,

t_a og t_b Calorimetrets Varmegrad ved Forsøgets Begyndelse og Slutning,

v Vægtforøgelsen af Absorptionsapparatet,

R Varmetoningen, beregnet for 1 Molecul NO,

bliver

$$R = \frac{2460 \cdot 54}{v} (t_b - t_a),$$

idet 54 er Vægten af ½ Molecul N_2O_5 og altsaa udgjør Vægtforøgelsen for hvert Molecul NO. Forsøgene ere følgende:

(NO, O)

No.	T	t_a	t_b	v	R
1519	19,0	18,320	19,235	6,22 Gr.	19542°
1520	19,2	18,340	19,900	10,62 —	19513

I den 2den Forsøgsrække blev den dannede Salpeterundersyre ført ind i et andet Calorimeter, hvor den blev optaget af en større Vandmængde, og hvor tillige Varmetoningen ved Absorptionen blev maalt. Absorptionskarret var en Platinkolbe af omtrent 1500 Cubikcentimeters Indhold, som blev fyldt med 1200 Gr. Vand. Efter Forsøgets Slutning blev den dannede Opløsning undersøgt, deels ved Titrering med en Opløsning af manganoversuurt Kali, for at maale Mængden af den ved Salpeterundersyrens Sønderdeling dannede Salpetersyrling, deels ved Titrering med Barytopløsning, for at maale Mængden af begge de ved Sønderdelingen dannede Syrer, Salpetersyre og Salpetersyrling.

Beregner man af de fundne Størrelser den Vægt af Opløsningen, som er nødvendig til Neutralisation af 1 Molecul Barythydrat, $Ba\,O_2\,H_2$, og ligeledes den Vægt af Opløsningen, som formaaer at optage 1 Atom Ilt af Manganoversyreopløsningen, vil man finde Størrelser, som stemme overeens paa mindre end en Tusindedeel, f. Ex. 10802 og 10811 Gramm. Det fremgaaer heraf, at Iltmængden, som Opløsningen i Calorimetret har optaget under Forsøget, for hvert Molecul NO kun udgjør 0,0004 Atomer, og man kan derfor uden Indflydelse paa Resultatet betragte den dannede Opløsning som en Blanding af NO_2H og NO_3H i et ligestort Moleculantal.

Det benyttede Apparat er skitseret i Fig. 4 med Udeladelse af Gasbeholderne; *C* er det første Calorimeter, i hvilket Salpeterundersyren dannes, *D* er det andet Calorimeter, i hvilket denne

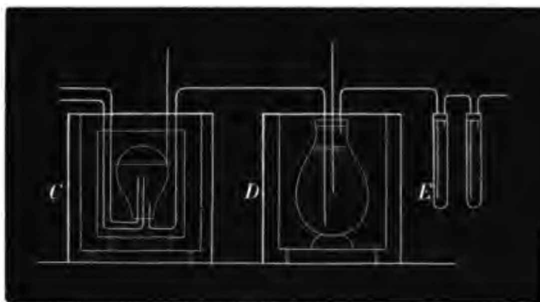


Fig. 4.

optages af Vand, *E* er et lille Apparat, som tjener til Control for, at al Salpeterundersyre er optaget i det i *D* indeholdte Vand, og er forbundet med Aspiratoren saaledes, at der suges Luft fra Calorimetret *D*; Vandet viser efter Forsøgene en svag suur Reaction, og Mængden af den bortførte ringe Syremængde bestemmes ved Titrering; den udgjør nogle Promille.

Det første Calorimeter var ligesom ovenfor fyldt med 2400 Gr. Vand; det samlede Vandværdi udgjør 2460 Gramm. Det andet Calorimeter indeholdt 1200 Gramm Vand og svarer i Alt til 1216 Gramm. Betegne T, t_a, t_b og R de samme Størrelser som ovenfor, endvidere t_1 og t_2 Varmegraden i det 2det Calorimeter før og efter Forsøget, m den dannede Opløsnings Molecularvægt, det vil sige den Vægt af samme, som neutraliserer 1 Molecul $Ba\,O_2\,H_2$, og R^1 Varmetoningen i det 2det Calorimeter, beregnet for Dobbeltmoleculet N_2O_4, — saa bliver Resultatet

$$R = (NO, O) = \frac{m}{2.\,1210}\,(t_b - t_a).\,2460^c.$$

$$R^1 = (N^2O^4, Aq) = \frac{m}{1210}\,(t_2 - t_1).\,1216^c.$$

Størrelsen 1210, som indgaaer i begge Formler, er Vægten af den i det 2det Calorimeter dannede Opløsning; Vandmængden var 1200 Gramm, men ved Absorptionen forøgedes Vægten til 1210,1 og 1210,2 Gramm.

Forsøgene ere følgende:

(NO, O)

No.	T	t_a	t_b	R
1521	18,9	17,993	19,760	19420
1522	18,2	17,340	19,115	19800

(N^2O^4, Aq)

	T	t_1	t_2	m	R'
ad No. 1521	18,9	18,227	19,655	10811 Gr.	15514ᶜ
1522	18,2	17,650	19,p55	10976 —	15500

Varmetoningen ved Dannelsen af luftformig Salpeterundersyre af Qvælstoftveilte og Ilt bliver efter Forsøgene Nr. 1519—22:

$$(NO, O) = \left\{ \begin{array}{c} 19542^c \\ 19513 \\ 19420 \\ 19800 \end{array} \right\} = 19570^c,$$

medens Varmetoningen ved Opløsning af Salpeterundersyre i Vand bliver

$$(N^2O^4, Aq) = 15510^c.$$

Jeg kommer nedenfor nærmere ind paa Betydningen og Benyttelsen af disse Størrelser.

C. Iltning af Salpeterundersyre til Salpetersyre i vandig Opløsning.

For at maale Varmetoningen ved Iltning af Salpeterundersyre til Salpetersyre benyttede jeg tvende Fremgangsmaader, idet jeg deels anvendte luftformigt Chlor, deels en Opløsning af manganoversuurt Kali som Iltningsmiddel.

Iltningen af en vandig Opløsning af Salpeterundersyre ved Hjælp af luftformigt Chlor blev foretaget paa følgende Maade: En Opløsning af Salpeterundersyre i Vand, som indeholdt et Dobbelmolecul N_2O_4 i omtrent 22600 Gramm Vand, blev i Calorimetret behandlet med tør Chlorluft. Af Vædsken blev til hvert Forsøg benyttet 1210 Gramm; i det første Forsøg blev optaget omtrent 3,8 og i det andet 2,5 Gr. Chlor, saa at Vædskens Vægt efter Forsøget udgjorde 1213,8 og 1212,5 Gramm; denne Størrelse er nedenfor betegnet med A. Calorimetrets Vandværdi udgjorde i Alt 1216 Gramm. Efter Forsøgets Slutning blev Mængden af absorberet Chlor maalt ved Titrering med en Sølvopløsning, hvis Molecul var 10180 Gramm. Vægten af den til Titrering benyttede Vædske er betegnet ved a, den tilsvarende Vægt af Sølvopløsningen med b. Varmeudviklingen for hvert Molecul absorberet Chlor bliver da

$$R = 2.\ 1216.\ \frac{10180}{b} \cdot \frac{a}{A}\ (t_b - t_a).$$

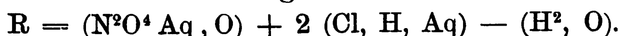
Forsøgene gave følgende Resultater:



$(N^2O^4\,Aq,\ Cl^2)$

No.	T	t_a	t_b	a	b	R
1523	15,5	14,845	16,100	39,79 Gr.	35,65 Gr.	28588^c
1524	15,5	15,100	15,912	39,78 —	23,13 —	28526

Den caloriske Reaction er følgende:



$$R = (N^2O^4\,Aq,\,O) + 2\ (Cl,\ H,\ Aq) - (H^2,\ O).$$

Da nu ifølge mine Forsøg

$$2\ (Cl,\ H,\ Aq) = 78640^c$$
$$(H^2,\ O) = 68360^c$$

findes for den søgte Reaction

$$(N^2O^4\,Aq,\,O) = 18277^c;$$

d. v. s. en vandig Opløsning af Salpeterundersyre giver ved Iltning til Salpetersyre en Varmeudvikling af 18277^c for hvert Atom Ilt, som optages.

Det saaledes fundne Resultat har jeg controlleret ved Iltning af en lignende Opløsning med manganoversuurt Kali; denne Opløsning indeholdt i 450 Gramm $^1/_{250}$ Mol. $Mn_2 O_8 K_2$, d. v. s. saameget Salt, at det ved den fuldstændige Reduction kunde afgive $^1/_{50}$ Atom Ilt. Reductionen blev. foretaget med en Opløsning af Salpeterundersyre, som i 450 Gramm indeholdt lidt mere Salpeterundersyre end fornødent til Reductionen. Forsøgene bleve udførte i det tidligere beskrevne Blandingscalorimeter (Pogg. Annal. Bd. 148 S. 68).

Enhver af Beholderne indeholdt 450 Gramm Opløsning; t_a og t_b ere Varmegraden af den øverste og nederste Beholder før Forsøget, og t_c den nederste Beholders Varmegrad efter Blandingen. Varmetoningen for et Molecul $N^2 O^4 Aq$ beregnes efter Formlen

$$R = 50\ [449\ (t_c - t_a) + 457\ (t_c - t_b)].$$

Iagttagelserne ere følgende:

$(N^2O^4Aq,\ ^1/_5\ K^2Mn^2O^8Aq)$

No.	T	t_a	t_b	t_c	R
1525	19,0	19,155	18,515	19,495	30030^c
1526	19,0	19,350	18,545	19,610	30165

En Deel af den udviklede Varme har sin Oprindelse fra Reductionen af det manganoversure Kali; i saltsuur eller salpetersuur Vædske udgjør denne Størrelse 11730^c for hvert Atom Ilt (see mine Forsøg i Pogg. Annal. Bd. 151 S. 211), og med Fradrag af denne Størrelse erholdes

$$(N^2O^4Aq,\ O) = 30097 - 11730^c = 18367^c.$$

For den samme Proces fandtes ovenfor 18277^c; Middeltallet er 18322^c.

D. Adskillelse af Qvælstofforilte ved Opvarmning.

Tvende Forsøg bleve udførte til Maaling af Varmetoningen ved Adskillelsen af Qvælstofforilte. I det ene Forsøg lod

jeg Qvælstofforilte brænde i en Atmosphære af Brint, i det andet Forsøg brændte Kulilte i en Atmosphære af Qvælstofforilte. Forsøgene bleve udførte med de samme Apparater, med hvilke jeg har maalt Brintens og Kuliltens Forbrændingsvarme, og som jeg har beskrevet tidligere (Pogg. Annal. Bd. 148 S. 368).

I disse Forsøg bestemte jeg Brintens Forbrændingsvarme ved at lade Ilt brænde i en Atmosphære af Brint og veie det dannede Vand; ganske paa samme Maade blev Qvælstofforilte brændt i en Atmosphære af reen Brint; der dannes derved ligeledes Vand, men Ilten kan i dette Tilfælde kun erholdes ved Adskillelse af Qvælstofforilte. Reactionen er altsaa



$$N_2O + H_2 = H_2O + N_2$$

og den caloriske Reaction

$$R = (H^2, O) - (N^2, O).$$

Efterfølgende Tabel indeholder Forsøgets Enkeltheder, idet alle Betegnelser have samme Betydning som i de ovenfor citerede Forsøg:

Forsøg No. 1527	$(H^2, O) - (N^2, O)$
T	18°,3
t_a	16,210
t_2	21,180
t_5	21,160
t_8	21,140
t_b	21,193
$\vartheta = t_b - t_a$	4,983
a	0,045 gr.
b	0,103 -
c	0,115 -
d	2,314 -

Calorimetrets Vandværdi udgjorde 2468 Gramm; da nu Temperaturstigningen udgjør $\vartheta = 4^0{,}983$, er den af Calorimetret optagne Varmemængde $2468 \times 4{,}983 = 12298^c$. Hertil kommer endnu (see de citerede Forsøg) to Correctioner, nemlig $\frac{d \cdot \vartheta}{2} = 6^c$ og $b.593^c = 61^c$, saa at den hele Varmemængde udgjør

$$12298^c + 6^c + 61^c = 12365^c.$$

Vægten af det dannede Vand er $a + b + c + d = 2{,}577$ Gramm, og Varmeudviklingen for 1 Mol. Vand = 18 Gramm bliver derfor

$$(H^2, O) - (N^2, O) = \frac{12365^c \cdot 18}{2{,}577} = 86370^c.$$

Da nu efter mine Forsøg

$$(H^2, O) = 68360^c$$

bliver

$$(N^2, O) = -18010^c.$$

Det maa dog bemærkes, at der ved denne Forbrænding af Qvælstofforilte i Brint dannes en ringe Mængde Salpetersyrling eller Salpeterundersyre, saa at den fundne Værdi af den Grund kan lide af en lille Unøiagtighed.

I det andet Forsøg foretoges en Forbrænding af Kulilte i Qvælstofforilte; Apparatet var i det Væsentlige det samme som i det foregaaende Tilfælde; Mængden af den dannede Kulsyre blev bestemt ved Absorption i Kalilud, efter at Luften ved Jernforiltesalt var befriet for de Dampe af Salpetersyrling, som i temmelig rigelig Mængde fremtræde ved denne Forbrænding af Kulilte i en Atmosphære af Qvælstofforilte. Forsøgets Enkeltheder ere følgende:

Forsøg No. 1528	$(CO, O) - (N^2, O)$
T	17°,3
t_a	16,240
t_b	18,300
Kulsyre	2,610 Gr.

Calorimetrets Vandværdi udgjorde 2460 Gramm, altsaa var Varmeudviklingen for 1 Molecul eller 44 Gramm Kulsyre

$$(CO, O) - (N^2, O) = 2460 \, . \, (t_b - t_a \frac{44}{2{,}610} = 85430^c.$$

Kuliltens Forbrændingsvarme, maalt ved det samme Apparat,

naar dette indeholder Ilt istedetfor Qvælstofforilte, udgjør efter mine Forsøg

$$(CO, O) = 66810^c$$

og altsaa bliver

$$(N^2, O) = -18620^c$$

medens vi ovenfor ved Forbrændingen af Qvælstofforilte i Brint fandt -18010^c. Forskjellen udgjør omtrent 3 Procent; men det er næppe muligt paa denne Maade at opnaae større Overeensstemmelse; thi den samtidigt dannede Salpetersyrling maa altid udøve en vis Indflydelse paa Resultatet. Middeltallet er

$$(N^2, O) = -18315^c,$$

og denne Værdi vil jeg indtil videre benytte.

E. Beregning af Hovedresultaterne.

Den foreliggende Undersøgelse har tjent til at maale Varmetoningen ved følgende 5 Processer:

	Reaction.	Varmetoning.	Forklaringer.
a	(N^2, H^4, O^2)	64950^c	Det salpetersyrlede Ammoniaks Dannelse af dets Grundbestanddele.
b	(N^2O^2, O^2)	39140	Luftformig Salpeterundersyre, dannet af Qvælstoftveilte og Ilt.
c	(N^2O^4, Aq)	15510	Salpeterundersyre absorberet af Vand.
d	(N^2O^4Aq, O)	18320	Salpetersyreunderopløsningen iltet til Salpetersyre ved fri Ilt.
e	(N^2, O)	−18315	Qvælstofforiltets Dannelsesvarme.

Vi skulle nu see, hvorledes disse Værdier kunne benyttes til Beregning af Varmetoningen ved Dannelsen af Qvælstoffets Iltforbindelser af Grundbestanddelene.

1. S a l p e t e r s y r e. Af Reactionerne b, c og d følger Varmetoningen ved Dannelse af Salpetersyre af Qvælstoftveilte og Ilt; thi



$$(N^2O^2, O^2) + (N^2O^4, Aq) + (N^2O^4Aq, O) = (N^2O^2, O^3, Aq)$$

d. v. s. der dannes en vandig Opløsning af Salpetersyre, idet Qvælstoftveilte iltes til Salpeterundersyre, hvorpaa denne opløses i Vand og iltes til Salpetersyre; efter de i Tabellen indeholdte Værdier er da

$$(N^2O^2, O^3, Aq) = 72970^c.$$

Den chemiske Proces, som foregaaer ved Opløsning af Salpeterundersyre i Vand, kan opfattes paa forskjellig Maade, men Størrelsen af den for Salpetersyrens Dannelse beregnede Varmetoning er uafhængig af enhver Hypothese; anderledes forholder det sig, naar det gjælder Bestemmelsen af Salpetersyrlingens Dannelsesvarme.

2. S a l p e t e r s y r l i n g. Ved Opløsning af Salpeterundersyre i Vand kunne tvende Processer tænkes at foregaae, e n t e n at der dannes Salpetersyre og Salpetersyrling efter Formlen



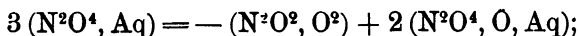
$$2\,N^2O^4 + Aq = N^2O^5Aq + N^2O^3Aq,$$

e l l e r der dannes Salpetersyre og Qvælstoftveilte efter Formlen



$$3\,N^2O^4 + Aq = N^2O^2 + 2\,N^2O^5Aq.$$

Det kan imidlertid bevises, at den sidstnævnte Proces ikke foregaaer ved Tilstedeværelsen af en større Vandmængde. Den sidste Reaction vilde nemlig svare til følgende caloriske Reaction:



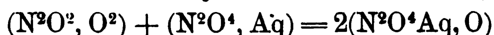
$$3\,(N^2O^4, Aq) = -(N^2O^2, O^2) + 2\,(N^2O^4, O, Aq);$$

men nu er



$$(N^2O^4, O, Aq) = (N^2O^4, Aq) + (N^2O^4Aq, O)$$

og ved at indsætte dette Udtryk i den første Formel, erholder man

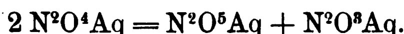


$$(N^2O^2, O^2) + (N^2O^4, Aq) = 2(N^2O^4Aq, O)$$

eller $b + c = 2\,d.$

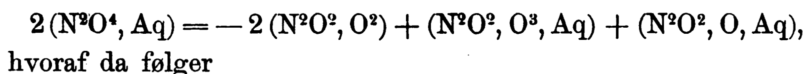
Nu er imidlertid efter Tabellen $b + c = 54650^c$, hvorimod $2\,d = 36640^c$; Ligningen $b + c = 2\,d$ er altsaa ikke tilfredsstillet, hvoraf følger, at Decompositionen ikke kan være den supponerede. Decompositionen af Salpeterundersyre ved Opløsning i en større Vandmængde maa altsaa foregaae efter den første An-

tagelse, idet der dannes Salpetersyrling og Salpetersyre efter Formlen



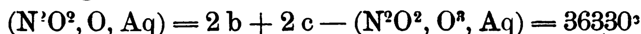
$$2\,N^2O^4Aq = N^2O^5Aq + N^2O^3Aq.$$

Den caloriske Reaction vil i dette Tilfælde blive



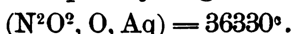
$$2\,(N^2O^4, Aq) = -2\,(N^2O^2, O^2) + (N^2O^2, O^3, Aq) + (N^2O^2, O, Aq),$$

hvoraf da følger



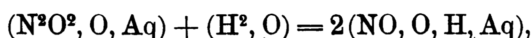
$$(N^2O^2, O, Aq) = 2\,b + 2\,c - (N^2O^2, O^3, Aq) = 36330^c$$

idet vi ovenfor for Salpetersyrens Dannelsesvarme fandt 72970c. Dannelsesvarmen for Salpetersyrling bliver altsaa



$$(N^2O^2, O, Aq) = 36330^c.$$

Da nu



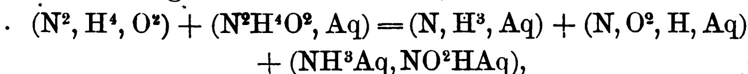
$$(N^2O^2, O, Aq) + (H^2, O) = 2\,(NO, O, H, Aq),$$

erholdes



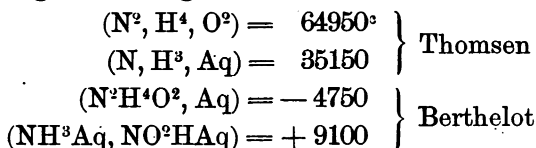
$$(NO, O, H, Aq) = 52345^c.$$

3. Qvælstoftveilte. Varmetoningen ved Dannelsen af salpetersyrlet Ammoniak er efter Tabellen 64950c; men Saltet kan tænkes dannet ad anden Vei af dets Grundbestanddele, uden at Varmetoningen derved forandres; man kan sætte



$$(N^2, H^4, O^2) + (N^2H^4O^2, Aq) = (N, H^3, Aq) + (N, O^2, H, Aq) + (NH^3Aq, NO^2HAq),$$

og af denne Ligning kan man finde Varmetoningen ved Dannelsen af Salpetersyrling af dets Grundbestanddele, (N, O^2, H, Aq). Til Beregning haves følgende Værdier:



$(N^2, H^4, O^2) =$	64950c	Thomsen
$(N, H^3, Aq) =$	35150	Thomsen
$(N^2H^4O^2, Aq) =$	− 4750	Berthelot
$(NH^3Aq, NO^2HAq) =$	+ 9100	Berthelot

og Beregningen giver da



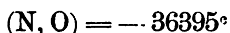
$$(N, O^2, H, Aq) = 15950^c.$$

Nu er



$$(N, O^2, H, Aq) = (N, O) + (NO, O, H, Aq),$$

og for den sidste Lov fandt vi ovenfor 52345, altsaa bliver



$$(N, O) = -36395^c$$

d. v. s. Varmetoningen ved Dannelsen af Qvælstoftveilte udgjør − 36395c. Denne Størrelse i Forbindelse med de ovenfor fundne, nemlig

$$(N^2O^2, O^2) = 39140^c$$
$$(N^2O^2, O, Aq) = 36330$$
$$(N^2O^2, O^3, Aq) = 72970$$

giver følgende Dannelsesvarme for Qvælstoffets Ilter og Syrer:

Reaction.	Varmetoning.	Forklaringer.
(N^2, O)	— 18320	Luftformige Producter.
(N^2, O^2)	— 72790	
(N^2, O^4)	— 33650	
(N^2, O^3, Aq)	— 36460	Vandige Opløsninger.
(N^2, O^4, Aq)	— 18140	
(N^2, O^5, Aq)	+ 180	

F. Ældre Undersøgelser.

Da jeg i Aaret 1872 offentliggjorde nogle af de ovennævnte Resultater, havde man saagodtsom intet Kjendskab til Størrelsen af Varmetoningen ved Dannelsen af andre Qvælstofilter end Qvælstofforilte, for hvilket Favre og Silbermann i Aaret 1852 havde fundet $(N^2, O) = - 17448^c$. Vel meddelte Favre nogle Aar senere Undersøgelser over Salpetersyrens Adskillelses-varme; men disse Forsøg maae betragtes som fuldstændigt mislykkede; thi deels vare de udførte i Qvægsølvcalorimetret og kunde derfor ikke gjøre Fordring paa Nøiagtighed, deels vare de valgte Processer af den Art, at intet sikkert Resultat med Hensyn til Producternes Beskaffenhed kunde drages, og Beregningerne maatte derfor føre til illusoriske Resultater. Ikke desto mindre troede Hr. Berthelot paa Grundlag af disse Iagttagelser at kunne beregne Qvælstofilternes, ligesom ogsaa de salpetersure Saltes, Nitroforbindelsernes og andre Stoffers Dannelsesvarme, og begyndte i Aaret 1871 Offentliggjørelsen af en Række Afhandlinger over disse Æmner; men da Grundlaget var unøiagtigt, bleve Resultaterne det i endnu høiere Grad, og de videnskabelige Tidsskrifter bleve fyldte med en Uendelighed af høist urigtige Talstørrelser. Dette foranledigede mig til ved Of-

fentliggjørelse af nogle af mine Maalinger at standse dette Uvæsen; i min Afhandling: „Die völlige Ungültigkeit der von Berthelot o. s. v." (Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft 1872 p. 181) paaviste jeg følgende Hovedfeil:

$$(N^2O^2, O, Aq) = -13200^c \text{ istedetfor } + 36340^c$$
$$(NO, O) = + 3000 \quad - \quad + 19568.$$

Med de tvende første Tal regnede Hr. B., hvorimod de tvende i sidste Spalte ere Resultaterne af mine Forsøg. Naar dertil endnu kommer, at Hr. B. satte $(N, O) = + 6900^c$, medens vi ovenfor have fundet -36395^c, er det indlysende, at de mange Tal, som hans Afhandlinger indeholdt, vare fuldstændigt urigtige.

Foranlediget ved dette Angreb paabegyndte Hr. B. en Række Undersøgelser for at controllere mine Resultater og offentliggjorde to Aar senere sine Undersøgelser, som saa fuldstændigt som vel muligt stadfæstede Rigtigheden af mine Størrelser, hvilket fremgaaer af nedenstaaende Sammenstilling (see min Afhandling „Ueber die Bildungswärme der Oxyde des Stickstoffs"; Berichte der chem. Ges. 1874 S. 379).

Reaction.	Thomsen 1872.	Berthelot 1874.
(NO, O)	19568^c	19400^c
(N^2O^4, Aq)	15505	15600
(N^2O^4Aq, Cl^2)	28554	28660
(N^2O^2, O, Aq)	36340	36260
(N^2O^2, O^3, Aq)	72940	72660

Samtidigt med ovennævnte Værdier meddelte Hr. B. ogsaa Resultatet af sine Undersøgelser over Qvælstoftveiltets Dannelsesvarme, som ovenfor (Afsnit A) ere omtalte, og som førte til Resultatet $(N, O) = -43300^c$, medens mine ovenfor omtalte Forsøg, som bleve udførte 2 Aar senere, gave -36395^c for denne Proces.

Jeg har ovenfor udviklet Manglerne ved de Forsøg, som førte til Værdien -43300^c og maa derfor betragte Hr. Berthelots Maalning som unøiagtig. Den Overeensstemmelse, som var

tilveiebragt imellem Hr. Berthelots og mine Maalinger for alle Reactioner, i hvilke Radicalet NO optræder, forsvinder selvfølgeligt, saafremt Grundbestanddelene N og O optræde i Reactionerne istedetfor Radicalet NO.

Følgende Tabel viser de Afvigelser, som finde Sted imellem de af mine Forsøg følgende Værdier og de af Hr. Berthelot i hans Afhandling (Ann. chim. phys. (5) Vol. 6 p. 178) beregnede.

Reaction.	Thomsen.	Berthelot.
(N^2, O^2)	— 72790^c	— 86600^c
(N^2, O^4)	— 33650	— 48660
(N^2, O^3, Aq)	— 36460	— 51800
(N^2, O^5, Aq)	+ 180	— 14800

Forskjellen udgjør altsaa 14—15000 Varmeeenheder for hvert Molecul Qvælstof, og en lignende Forskjel maa altsaa ogsaa vise sig i alle Størrelser, i hvis Beregning Værdien for (N, O) indgaaer.

G. Tabellarisk Sammenstilling af Varmetoningen ved Dannelsen af forskjellige Qvælstofforbindelser.

Paa efterfølgende Blade har jeg til Slutning givet en tabellarisk Sammenstilling af Varmetoningen ved Dannelsen af forskjellige Qvælstofforbindelser, saaledes som den fremgaaer af mine Undersøgelser. Foruden Ilterne indeholde disse Tabeller ogsaa Ammoniakforbindelserne, med Hensyn til hvilke jeg maa henvise til min Afhandling XI. Til Slutning har jeg tilføiet en Tabel, der indeholder Dannelsesvarmen for de salpetersure Salte, som erholdes ved Combination af de i denne Afhandling vundne Resultater med dem, som mine Undersøgelser over Metallerne (Afhandlingerne XVI—XXV) have givet.

	Reaction.	Varmetoning.	Bemærkninger.
Qvælstof-forilte	(N^2, O)	— 18320	
	(NO, N)	+ 18075	N^2O dannet af NO og N
	$(N^2O, 2H^2O)$	— 30340	$NO^3 . NH^4$ dannet af N^2O og $2H^2O$
Qvælstof-tveilte	(N, O)	— 36395	
Salpeter-syrling	(N^2, O^3, Aq)	— 36460	vandig Opløsning
	(N^2O^2, O, Aq)	+ 36330	dannet ved Iltning af N^2O^2
	(N, O^2, H, Aq)	+ 15950	
	(NO, O, H, Aq)	+ 52345	dannet ved Iltning af NO
	(NO^2, H, Aq)	+ 32775	dannet ved Afiltning af NO^2
	$(N^2, 2H^2O)$	— 71770	$NO^2 NH^4$ dannet af N^2 og $2H^2O$
Salpeter-undersyre	(N, O^2)	— 16825	
	(NO, O)	+ 19570	
	(NO^2, Aq)	+ 7755	
Salpeter-syre	(N^2, O^5, Aq)	+ 180	vandig Opløsning
	(N^2O, O^4, Aq)	+ 18500	dannet af N^2O
	(N^2O^2, O^3, Aq)	+ 72970	„ „ N^2O^2
	(N^2O^4, O, Aq)	+ 33830	„ „ N^2O^4
	(N, O^3, H)	+ 26690	Salpetersyrehydrat
	(NO, O^2, H)	+ 63085	dannet af NO
	(NO^2, O, H)	+ 43515	„ „ NO^2
	(NO^3H, Aq)	+ 7580	Salpetersyrehydratets Opløsningsvarme
	(N, O^3, H, Aq)	+ 34270	Salpetersyreopløsning dannet af N

	Reaction.	Varmetoning.	Bemærkninger.
Salpetersyre	(NO, O^2, H, Aq)	+ 70665	Salpetersyreopløsning dannet af NO
	(NO^2, O, H, Aq)	+ 51095	Salpetersyreopløsning dannet af NO^2
	(NO^2H Aq, O)	+ 18320	Iltning af NO^2H til NO^3H i vandig Opløsning
Ammoniak	(N, H^3)	26710	luftformig Ammoniak
	(NH^3, Aq)	8440	Absorptionsvarme
	(N, H^3, Aq)	35150	
	(NH^3Aq, NO^3 HAq)	12320	Neutralisationsvarme
	(NH^3Aq, HClAq)	12270	
	(NH^3Aq, H^2 S Aq)	6190	
	(N, H^4, Cl)	90620	krystalliserede Producter
	(N, H^4, Br)	80180	
	(N, H^4, J)	64130	
	(N, H^5, S)	53850	
	(N^2, O^3, H^4)	88060	
	(N^2, O^2, H^4)	64950	
Vandfrie salpetersure Salte	(K, N, O^3)	104660	Ved disse Reactioner dannes Saltene af deres Grundstoffer
	(Na, N, O^3)	96430	
	(Li, N, O^3)	96800	
	(Tl, N, O^3)	43330	
	(Ag, N, O^3)	13920	
	(Ba, N^2, O^6)	196100	
	(Sr, N^2, O^6)	190210	
	(Ca, N^2, O^6)	173590	
	(Pb, N^2, O^6)	75860	

Varmetoning ved Dannelsen af salpetersure Salte efter Formel (R, O^2, N^2O^4) og ved disse Saltes Opløsning i Vand.

	Reaction.	Varmetoning.	Varmetoning ved Saltets Opløsning i Vand.
Kalium ..	(K^2, O^2, N^2O^4)	242960c	— 17040c
Natrium ..	(Na^2, O^2, N^2O^4)	226500	— 10060
Lithium ..	(Li^2, O^2, N^2O^4)	227240	+ 600
Thallium .	(Tl^2, O^2, N^2O^4)	120300	— 19940
Sølv	(Ag^2, O^2, N^2O^4)	61480	— 10880
Baryum ..	(Ba, O^2, N^2O^4)	229750	— 9400
Strontium	(Sr, O^2, N^2O^4)	223860	— 4620
Calcium ..	(Ca, O^2, N^2O^4)	207240	+ 3950
Bly	(Pb, O^2, N^2O^4)	109510	— 7610
Strontium	($Sr, O^2, N^2O^4, 4H^2O$)	231540	— 12300
Calcium ..	($Ca, O^2, N^2O^4, 4H^2O$)	218440	— 7250
Kadmium.	($Cd, O^2, N^2O^4, 4H^2O$)	124870	— 5040
Magnium.	($Mg, O^2, N^2O^4, 6H^2O$)	214530	— 4222
Zink	($Zn, O^2, N^2O^4, 6H^2O$)	142180	— 5840
Nikkel ...	($Ni, O^2, N^2O^4, 6H^2O$)	124720	— 7470
Kobalt ...	($Co, O^2, N^2O^4, 6H^2O$)	123330	— 4960
Kobber ..	($Cu, O^2, N^2O^4, 6H^2O$)	96950	— 10710

Da Varmetoningen ved Dannelsen af Radicalet N_2O_4 udgjør — 33650c, vil en Addition af denne Størrelse til Tallene i den 3die Spalte give Varmetoningen ved Dannelsen af Saltene af deres Elementer, idet dog for de vandholdige Saltes Vedkommende Vandet optræder som saadant og ikke som Ilt og Brint.

Universitetets chemiske Laboratorium, November 1878.

CASTOR.

CALCUL DU MOUVEMENT RELATIF
ET
CRITIQUE DES OBSERVATIONS DE CETTE ETOILE DOUBLE.

PAR

T. N. THIELE.

Les recherches suivantes sur le mouvement relatif du satellite de *Castor* autour de l'astre principal, fondées sur les observations très nombreuses qui ont été commencées en 1718 (Bradley) et poursuivies sans interruption depuis 1815 (W. Struve & J. Herschel) jusqu'à nos jours, n'ont pas pour but d'en déterminer des éléments de l'orbite capables de représenter son mouvement futur dans une longue série d'années. Toute tentative faite dans ce sens ne servirait qu'à confirmer l'opinion émise récemment par Mr. Doberck, qu'une telle détermination est encore impossible, l'un au moins des 7 éléments devant rester tout à fait indéterminé. On est d'abord tenté de supposer le contraire en voyant que, durant l'espace de temps que comprennent les observations, le satellite a décrit un arc de 9″ à une distance de l'astre principal variant de $3''^{1}/_{2}$ à $5''^{1}/_{2}$, et que plus d'un tiers de cet arc a été observé avec le plus grand soin; mais la courbure de l'orbite étant très faible, il s'ensuit qu'on peut représenter les observations avec une exactitude plus que suffisante non-seulement par une infinité d'orbites différentes, mais aussi, à l'exception peut-être de celles de Bradley, à l'aide d'une simple formule d'interpolation. Il est vrai que j'ai cru, il y a déjà plusieurs années, pouvoir déterminer l'orbite de cette étoile double, et d'autres astronomes l'ont cru de même; mais ni mon résultat, qui paraît avoir trouvé plus de confiance qu'il ne mérite, ni ceux des autres astronomes ne peuvent être considérés comme des approximations de l'orbite vraie, dont la forme

et les dimensions sont encore aussi indéterminables que l'orbite d'une planète nouvellement découverte qui n'aurait été observée que pendant une semaine.

Cependant si l'on prend pour formule d'interpolation une détermination des éléments, dans laquelle on ait suppléé à l'insuffisance des données de l'observation par des hypothèses arbitraires sur un ou plusieurs éléments indéterminables, cette formule présentera sur une autre formule d'interpolation l'avantage de pouvoir par hasard être exacte et servir pour tous les temps, conditions que cette dernière ne saurait remplir.

Toute formule d'interpolation qui permet de déterminer plus exactement que par chaque observation particulière la position relative des deux astres à un moment quelconque du temps que comprennent les observations, et peut-être une vingtaine d'années au delà, est d'une importance toute spéciale pour *Castor* et cela par plusieurs raisons.

Castor est, comme on sait, une des étoiles fondamentales qui servent de base à l'observation méridienne des autres corps célestes; il importe par conséquent de pouvoir comparer les observations du satellite avec celles de l'astre principal, et le moment approche où on pourra déterminer la position du centre de gravité des deux astres, et séparer leur mouvement propre du mouvement dans l'orbite.

L'autre motif qui donne une importance spéciale au système de *Castor*, est que le mouvement relatif de cette étoile étant assez lent, et ayant été l'objet d'un grand nombre d'observations, elle se prête peut-être mieux qu'aucune autre étoile double à des recherches sur la nature des erreurs systématiques, dont malheureusement sont affectées même les meilleures observations de ces astres.

La comparaison des observations contemporaines de différents observateurs, et surtout les mesures exécutées par M. O. Struve sur des étoiles doubles artificielles, ont suffisamment établi que les observations micrométriques, même celles qui sont faites avec le plus grand soin et avec les meilleurs appareils, sont sujettes à des erreurs beaucoup plus grandes qu'on ne devrait s'y attendre, à en juger d'après la concordance des observations

de la même étoile faites par le même observateur à des temps pas trop éloignés les uns des autres.

Ce sont, il est vrai, les distances mesurées par des personnes peu exercées ou avec des instruments insuffisants ou d'après des méthodes défectueuses, qui présentent les erreurs les plus grandes, et ces erreurs se distinguent ordinairement par ce caractère singulier, que leurs signes sont presque toujours positifs ou, en d'autres termes, que les distances mesurées sont plus grandes qu'elles ne peuvent l'être selon d'autres observations contemporaines plus dignes de confiance. Mais même les mesures qui ne peuvent nullement être classées dans cette catégorie, montrent des différences d'une nature moitié systématique moitié accidentelle tant dans les distances que dans les angles de position.

La cause de ces erreurs est inconnue; mais, selon toute probabilité, elle est principalement physiologique et non inhérente aux instruments employés. Leur caractère systématique est manifeste, surtout après les recherches de Mr. O. Struve; elles sont fonction de la distance elle-même, du grossissement employé et de l'angle de direction, pourvu qu'on compte cet angle d'une direction fixe, qui dépend de la position de l'oeil. La forme de cette fonction est connue, au moins quant à son caractère général. D'un autre côté, si on compare entr'elles des observations faites par différents observateurs ou par le même observateur à des temps différents, on s'aperçoit que ces erreurs sont aussi en partie accidentelles; car on trouvera alors que les constantes des formules qui expriment les erreurs en fonction des distances et des angles de position, sont, au moins en partie, sujettes à des changements qui ne suivent aucune loi continue en fonction du temps, mais qui se produisent accidentellement et quelquefois assez brusquement.

Il est très probable que des étoiles doubles qui se ressemblent beaucoup non-seulement quant à leurs positions relatives, mais aussi par les vitesses de leur mouvement diurne, leur éclat et leurs couleurs, montrent aussi les mêmes variations des erreurs systématiques; en effet une même étoile qu'on observe de nouveau, doit être considérée à cet égard plutôt comme une

nouvelle étoile très semblable à la première, que comme un objet de mesure identique. Mais il est douteux que des étoiles doubles qui n'ont pas la même déclinaison et qui n'offrent pas le même aspect, se comportent de la même manière par rapport aux erreurs systématiques, et surtout que des étoiles doubles très hétérogènes subissent avec le temps les mêmes variations dans ces erreurs. Il est encore plus douteux que les erreurs systématiques qu'on trouve en mesurant des étoiles doubles artificielles, puissent sans modifications être appliquées aux mesures des étoiles doubles naturelles.

Il y a donc dans l'état actuel de nos connaissances touchant ces matières assez de doutes à éclaircir, et on est encore loin de pouvoir corriger les observations des erreurs systématiques. Or, on n'a pas le droit de considérer la moyenne de plusieurs observations contemporaines comme s'approchant plus de la vérité que chaque observation individuelle, et quant à celles-ci on ne sait pour ainsi dire rien de leur poids réel. Il n'est pas correct de vouloir concilier les observations divergentes à l'aide de la méthode des moindres carrés. Le seul point de départ qui offre au calcul d'une orbite d'étoile double une sûreté relative, est fourni par la connaissance d'un grand nombre d'observations contemporaines dues à différents observateurs, et consiste seulement en ce qu'il n'est pas probable que la vraie valeur se trouve dans les valeurs extrêmes observées ni au delà. Cependant, il peut être permis d'employer la méthode des moindres carrés, même d'une façon peu correcte, pour surmonter les difficultés très pénibles que rencontre toujours le calculateur de telles orbites; on agit alors comme dans la vie journalière, où l'on prend souvent des décisions au hasard, quand il vaut mieux d'en prendre une même mauvaise, que de n'en prendre aucune. Quant à moi, dans les orbites d'étoiles doubles que j'ai calculées jusqu'à présent, je n'ai jamais rencontré de difficultés qui m'aient forcé à faire une pareille application de cette méthode, mais la voie à suivre pour représenter les observations par une orbite sans trop s'en éloigner est indécise, et les moyens qu'on a em-

ployés avec succès au calcul de Castor, peuvent manquer complètement leur but dans celui de ξ Ursœ par exemple.

Mais a-t-on une fois réussi à trouver une orbite ou une formule d'interpolation qui ne soit pas en contradiction flagrante avec l'ensemble des observations d'un temps quelconque, un tel résultat peut avoir une grande valeur comme moyen de mettre en lumière la nature des erreurs systématiques. La seule dérivation des éléments de l'orbite d'une étoile double n'a à présent et n'aura de longtemps que très peu d'importance; c'est seulement un moyen et non le but du travail, qui doit être de se servir de ces éléments pour comparer les observations avec le calcul, afin d'en tirer des résultats par rapport aux erreurs systématiques et à leurs variations, et de faciliter en même temps le travail aux calculateurs de l'avenir.

La forme de fonction des erreurs systématiques considérée comme dépendant des distances et des angles de position, ne peut pas être déduite d'une série d'observations d'une étoile double isolée. Si les erreurs ne variaient pas en même temps d'une manière irrégulière d'une année à l'autre, leur effet serait en général le même que si les différents observateurs, au lieu de projeter les objets mesurés sur un plan fixe perpendiculaire à la ligne de vision, avaient opéré chacun sur un plan à soi avec une méthode de projection à soi. Dans ce cas, on aurait peut-être d'abord pu déterminer les éléments indépendants des projections employées et, par conséquent, communs à tous les observateurs, et puis trouver des expressions simples pour les erreurs systématiques en indiquant, pour chaque observateur, l'espèce de projection qui aurait permis de rapporter ses observations à l'orbite commune à tous. En effet, avant qu'on eût reconnu que les erreurs systématiques affectaient non-seulement les distances mais aussi les angles de position, on avait essayé de suivre une méthode analogue en calculant des systèmes d'éléments dans lesquels les six éléments étaient communs à tous les observateurs, tandis qu'on donnait à la distance moyenne une valeur différente pour chacun d'eux. Mais il y a un écueil sur lequel toutes ces tentatives sont venues échouer, à savoir la variabilité acci-

dentelle avec le temps, qui est la propriété la plus fâcheuse des erreurs systématiques.

Mais, comme c'est très souvent le cas dans les sciences naturelles, cette propriété si nuisible à la détermination des éléments est précisément ce qui la nécessite, ces éléments étant indispensables pour le calcul des variations des erreurs systématiques, en même temps que la correction de ces erreurs est la condition nécessaire au calcul de l'orbite la plus probable.

Il ne manque pas d'étoiles doubles qui, n'ayant manifesté aucun mouvement sensible pendant tout le temps qu'elles ont été observées, paraîtraient fournir un moyen très commode pour les recherches sur la variabilité avec le temps des erreurs systématiques, et elles ont aussi été employées à cette fin. Mais ce moyen n'est pas si commode qu'on pourrait le croire et il est même dangereux de l'employer exclusivement; car les étoiles doubles sans mouvement relatif ne sont en général observées que jusqu'à ce qu'on se soit aperçu de leur immobilité relative. Les étoiles doubles à courte période de révolution ont naturellement attiré l'attention exclusive de la plupart des observateurs, et ceux qui n'ont pas tout à fait négligé les immobiles, ont été contraints par l'abondance même de ces dernières à ne faire de chacune d'elles qu'un nombre très limité d'observations.

Mais toute recherche sur la nature des erreurs exige des observations très nombreuses, surtout quand il s'agit de séparer les erreurs systématiques de celles qui sont purement accidentelles. Et c'est principalement pour les recherches sur la variabilité accidentelle des erreurs systématiques, qu'il est indispensable de prendre pour point de départ des étoiles qui aient été observées à peu près aussi souvent que l'occasion s'en est présentée, pour pouvoir, par la considération de la marche des erreurs avec le temps, déterminer, d'une part, les périodes pendant lesquelles un observateur a observé d'une manière constante, et, d'autre part, les époques où ses erreurs systématiques ont subi des variations.

Or, ce n'est que parmi les étoiles doubles remarquables par leur mouvement, qu'on en trouve qui aient été aussi fréquem-

ment observées; pour étudier les erreurs systématiques, il est donc indispensable de calculer une orbite, ou de déterminer au moins une formule d'interpolation.

Mais, d'un autre côté, les étoiles doubles qui, par leur mouvement relatif trop grand, ont attiré l'attention spéciale des observateurs et des calculateurs, ne peuvent non plus nous servir à cause des trop grandes difficultés qu'elles présentent; car il faudrait non-seulement trouver une orbite qui ne fût pas en contradiction avec les observations, mais aussi séparer les variations propres des erreurs systématiques de celles qui proviennent de la grande variabilité de la position relative des deux astres, variabilité qui peut changer les erreurs systématiques sans que l'observateur change sa manière d'observer.

On sait qu'il a été convenu entre plusieurs observateurs d'observer très fréquemment un certain nombre d'étoiles doubles peu mobiles dans le but spécial d'étudier les erreurs systématiques, de sorte qu'on peut espérer de pouvoir à l'avenir les éliminer ou les corriger; mais, pour les observations déjà faites sans cette précaution, le meilleur point de départ pour une étude approfondie de ces erreurs sera de soumettre au calcul le petit nombre d'étoiles doubles qui, malgré leur mouvement relativement lent (trop lent en général pour qu'on en puisse déterminer l'orbite), ont cependant par d'autres motifs attiré l'attention des observateurs.

Parmi ces étoiles doubles propres à élucider la nature des erreurs systématiques, *Castor*, comme on l'a vu, occupe un des premiers rangs. M'attachant donc de préférence à l'étude de cette étoile, j'ai d'abord, à l'aide de mes calculs antérieurs et par la méthode graphique, déterminé trois positions normales complètes représentant les distances et les angles de position observés depuis 1815, et un angle de position selon Bradley et W. Herschel.

En cherchant à déduire de ces données une orbite, et en faisant dans ce but des hypothèses sur la période de révolution, je me suis aperçu que cet élément ne peut pas être déterminé par les observations faites jusqu' ici, lesquelles s'adaptent aussi

bien à une orbite parabolique qu'à une série d'ellipses jusqu'à la plus petite possible qui ne laisse pas au dehors de la périphérie l'astre principal, ce qui correspond à une période de révolution d'un peu au delà de 300 ans. Pour s'en convaincre, il suffit de regarder les tables suivantes, qui contiennent divers systèmes d'éphémérides:

Périodes de révolution =

	∞ ans	2160 ans	1080 ans	720 ans	540 ans	432 ans	360 ans
	pour les distances						
1720	5″42	5″38	5″35	5″32	5″30	5″27	5″24
40	4·50	4·48	4·47	4·45	4·44	4·43	4·42
60	3·80	3·80	3·80	3·79	3·79	3·79	3·79
80	3·48	3·48	3·49	3·49	3·50	3·50	3·51
1800	3·62	3·63	3·64	3·64	3·65	3·65	3·66
20	4·15	4·16	4·16	4·16	4·16	4·16	4·16
40	4·84	4·84	4·84	4·83	4·83	4·83	4·83
60	5·40	5·41	5·41	5·41	5·41	5·41	5·41
80	5·52	5·49	5·47	5·45	5·43	5·41	5·39
1900	4·98	4·66	4·38	4·00	3·44	2·33	2·11
	pour les angles de position						
1720	356°2	356°2	356°2	356°2	356°2	356°2	356°2
40	345·0	344·9	344·8	344·7	344·6	344·5	344·4
60	328·9	328·7	328·5	328·4	328·3	328·2	328·0
80	307.8	307·7	307·5	307·4	307·3	307·2	307·1
1800	285·7	285·6	285·6	285·5	285·5	285·5	285·4
20	267·3	267·3	267·3	267·3	267·3	267·3	267·3
40	253·8	253·8	253·8	253·8	253·8	253·8	253·8
60	243·5	243·5	243·5	243·5	243·5	243·5	243·5
80	234·6	234·6	234·6	234·6	234·6	234·5	234·5
1900	225·0	224·3	223·8	223·1	221·8	218·6	45.9

J'ai comparé à une de ces éphémérides toutes les observations à moi connues et, avec les différences, j'ai construit deux courbes, l'une pour les distances, l'autre pour les angles de position. J'ai ensuite, à l'aide de la loi de proportionnalité des secteurs au temps, transformé les distances ainsi trouvées en angles de position, et les angles de position en distances, et je

me suis efforcé de concilier les doubles valeurs ainsi obtenues, de manière qu'on pût supposer que l'orbite déduite d'un nombre suffisant et convenablement choisi entre ces valeurs, ne donnerait nulle part une déviation considérable des observations. (Vide: Undersøgelse af Omløbsbevægelsen i Dobbeltstjernesystemet. Gamma Virgines. [Recherches sur le mouvement relatif de γ de la Vierge]).

C'est ainsi que j'ai formé les 5 valeurs normales suivantes:

$$1750{\cdot}0 \qquad R = 336^{\circ}{\cdot}63$$

$$1830{\cdot}0 \quad r = 4''{\cdot}542 \quad R = 260^{\circ}{\cdot}22$$

$$1870{\cdot}0 \quad r = 5''{\cdot}518 \quad R = 238^{\circ}{\cdot}76,$$

à ces valeurs j'aurais encore pu joindre une distance pour 1850·0; mais j'ai jugé préférable d'admettre comme sixième donnée le quotient

$$k = -\ 0{\cdot}11897$$

du secteur (en secondes d'arc carrés) par le temps (en années), déterminé et employé à l'occasion de la transformation susdite des distances en angles et vice versâ. Comme septième donnée, il fallait prendre une valeur arbitraire du mouvement annuel moyen, et comme les valeurs extrêmes possibles sont 0^{0} et un nombre un peu au delà de 1^{0}, correspondant à la parabole et à l'ellipse la plus petite possible, j'ai choisi la valeur $\frac{1}{2}^{0}$, qui donne pour période de révolution 720 ans.

J'ai basé sur ces données un calcul des éléments elliptiques, en faisant les hypothèses nécessaires pour la solution des équations transcendantes sur la distance 1750. Mais, comme il ne s'agissait ici que de trouver une formule d'interpolation, j'ai arrêté mes calculs après avoir déterminé les constantes des formules nécessaires pour le calcul de la distance r et de l'angle de position R en fonction du temps t, au moyen de l'anomalie excentrique, E (en degrés). Les éléments ordinaires de l'orbite n'ayant aucune importance réelle, je ne les ai pas calculés. Pour l'équinoxe de 1850·0, on a:

$$E - [1{\cdot}02512] \sin E = -\ \tfrac{1}{2}\ (t - 1865{\cdot}714)$$

$$r \cos R = [0{\cdot}74248] \cos (E + 233^{\circ}\, 48'{\cdot}2) + 0''{\cdot}60361 \qquad \text{I}$$

$$r \sin R = [0{\cdot}76585] \cos (E + 176^{\circ}\ 2'{\cdot}8) + 1''{\cdot}07608$$

les chiffres entre parenthèses [ ] étant les logarithmes des nombres.

A l'aide de ces formules, j'ai calculé l'éphéméride suivante, dans laquelle les angles R et les différences d'ascension droite $\Delta\alpha$ et de déclinaison $\Delta\delta$ sont apparentes.

t	r	R	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	t	r	R	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
	″	°	s	″		″	°	s	″
1718·0	4·73	360·5	+·003	+4·73	1794	3·67	289·9	—·273	+ 1·25
1720	4·66	359·3	—·004	+4·66	96	3·71	287·9	·278	1·14
22	4·59	358·0	·013	4·59	98	3·74	285·9	·284	1·03
24	4·53	356·7	·020	4·52	1800·0	3·78	284·0	—·289	+ ·91
26	4·46	355·4	·028	4·45	2	3·82	282·1	·295	·80
28	4·40	354·0	·036	4·37	4	3·86	280·3	·300	·69
1730·0	4·33	352·6	—·044	+4·30	6	3·91	278·5	·305	·58
32	4·27	351·1	·052	4·22	8	3·95	276·7	·310	·46
34	4·21	349·6	·060	4·14	1810·0	4·003	275·02	—·315	+ ·35
36	4·15	348·1	·068	4·06	12	4·052	273·35	·319	·24
38	4·10	346·5	·076	3·98	14	4·104	271·73	·324	·12
1740·0	4·04	344·8	—·084	+3·90	16	4·156	270·14	·328	+ ·01
42	3·99	343·2	·091	3·82	18	4·209	268·59	·332	— ·10
44	3·94	341·4	·099	3·73	1820·0	4·263	267·08	—·336	— ·22
46	3·89	339·7	·107	3·65	22	4·318	265·61	·340	·33
48	3·84	337·9	·114	3·56	24	4·374	264·18	·343	·44
1750·0	3·80	336·0	—·122	+3·47	26	4·430	262·79	·347	·56
52	3·76	334·1	·130	3·38	28	4·486	261·43	·350	·67
54	3·72	332·2	·137	3·29	1830·0	4·542	260·10	—·353	— ·78
56	3·69	330·2	·145	3·20	32	4·598	258·81	·356	·89
58	3·65	328·2	·152	3·11	34	4·654	257·55	·358	1·00
1760·0	3·63	326·1	—·160	+3·01	36	4·710	256·32	·361	1·12
62	3·60	324·0	·167	2·91	38	4·765	255·12	·363	1·23
64	3·58	321·9	·174	2·82	1840·0	4·820	253·94	—·365	—1·33
66	3·56	319·8	·181	2·72	42	4·875	252·79	·367	1·44
68	3·54	317·7	·188	2·62	44	4·928	251·67	·369	1·55
1770·0	3·53	315·5	—·195	+2·52	46	4·981	250·57	·370	1·66
72	3·52	313·3	·202	2·42	48	5·033	249·49	·372	1·76
74	3·52	311·2	·209	2·32	1850·0	5·084	248·44	—·373	—1·87
76	3·52	309·0	·216	2·21	52	5·133	247·41	·374	1·97
78	3·52	306·8	·223	2·11	54	5·1[illegible]2	246·39	·374	2·08
1780·0	3·53	304·6	—·229	+2·00	56	5·229	245·40	·375	2·18
82	3·54	302·4	·236	1·90	58	5·275	244·42	·375	2·28
84	3·55	300·3	·242	1·79	1860·0	5·319	243·46	·375	—2·38
86	3·57	298·2	·249	1·69	62	5·362	242·52	·375	2·48
88	3·59	296·0	·255	1·58	64	5·404	241·59	·374	2·57
1790·0	3·62	294·0	—·261	+1·47	66	5·443	240·67	·374	2·67
92	3·64	291·9	·267	1·36	68	5·481	239·77	·373	2·76

t	r	R	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	t	r	R	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
	″	°	s	″		″	°	s	″
1870·0	5·518	238·88	—·372	—2·85	1886	5·743	232·13	—·357	—3·53
72	5·553	238·00	·371	2·94	88	5·763	231·32	·354	3·60
74	5·585	237·14	·369	3·03	1890·0	5·780	230·51	—·351	—3·68
76	5·617	236·28	·368	3·12	92	5·795	229·71	·348	3·75
78	5·646	235·44	·366	3·20	94	5·809	228·91	·345	3·82
1880·0	5·673	234·60	—·364	—3·29	96	5·820	228·12	·341	3·89
82	5·698	233·77	·362	3·37	98	5·830	227·33	·337	3·95
84	5·722	232·95	·360	3·45	1900 0	5·837	226·54	—·334	—4·02

Après m'être assuré qu'il y a en général une concordance suffisante entre cette éphéméride et les résultats de mes constructions préliminaires, j'ai comparé avec l'éphéméride toutes les observations individuelles de chaque observateur, non-seulement ses moyennes annuelles mais les mesures de chaque jour, et après cela j'ai pu aborder la partie essentielle de mon travail, c'est-à-dire la critique des observations relativement à leurs erreurs systématiques et surtout à la variabilité de celles-ci.

Il fallait détèrminer les erreurs moyennes de celles des observations de chaque observateur qui ont été faites dans des circonstances telles, qu'il n'y a qu'une probabilité minime en faveur d'un changement de méthode d'observation et, par suite, d'une variation des erreurs systématiques dans les périodes pendant lesquelles les observations ont eu lieu. Les périodes pendant lesquelles on doit présumer que l'observateur n'a pas modifié sa méthode d'observation, je propose de les appeler „saisons d'observation".

Il fallait alors suivre chaque observateur d'une saison d'observation à l'autre, en mesurant toutefois avec l'erreur moyenne correspondante les différences entre les moyennes pour les saisons consécutives d'observation, afin de s'assurer ou s'il y avait lieu de croire que les différences étaient trop grandes, ou de supposer qu'elles étaient suffisamment petites pour être expliquées comme purement accidentelles. Dans le premier cas, il fallait signaler une variation de l'erreur systématique, et, seulement dans le second, il était permis de réunir dans la même position normale des observations provenant de différentes saisons d'observation consécutives. Je ne pouvais

nullement me permettre de réunir dans la même position normale des observations faites par divers observateurs, pas même si pour *Castor* elles ne présentent pas des différences systématiques sensibles. En effet un pareil procédé ne servirait qu'à rendre plus difficile l'investigation des erreurs systématiques.

Pour les observateurs des étoiles doubles, les variations des erreurs systématiques sont en général assez nombreuses pour fournir, en quantité plus que suffisante, des indications naturelles des divisions entre les positions normales; il n'est par conséquent que rarement nécessaire de chercher d'autres raisons pour les divisions des séries d'observations, ou de les diviser arbitrairement pour se procurer un nombre assez grand de données pour le calcul de l'orbite. Ainsi l'opération commune de formation des positions normales est changée ici en critique des observations. Chaque valeur normale doit représenter telle série des observations consécutives du même observateur, parmi lesquelles on ne reconnaisse aucune trace manifeste de variation de l'erreur systématique.

Avant tout, il a fallu définir nettement et d'une manière pratique ce que j'ai appelé „saison d'observation". En effet, la méthode d'observation pouvant changer quelque peu d'un jour à l'autre, chaque jour d'observation serait à la rigueur une „saison", et il faudrait consulter les mesures individuelles de chaque jour pour déterminer les erreurs moyennes qui peuvent servir à mesurer les déviations purement accidentelles des observations. Toutefois un tel procédé est, vu les circonstances, tout à fait impraticable, car pût-on même se procurer les matériaux nécessaires, il n'en résulterait qu'un chaos impénétrable de variations d'erreurs systématiques, et une infinité des positions normales. Mais la plupart des publications des observations ne donnent, au lieu de mesures réellement individuelles, que les moyennes pour chaque jour; et les jours d'observation étant presque toujours groupés de manière qu'il y ait de petites périodes de quelques jours presque consécutives séparées par des intervalles considérables, ordinairement une ou plusieurs années, il est bien naturel de considérer ces périodes comme des saisons d'ob-

servation, de regarder toute moyenne pour un jour comme une observation individuelle et de supposer, quoique un peu arbitrairement, que les erreurs systématiques ne peuvent pas changer d'un jour à l'autre, mais seulement lorsque l'observateur, après un intervalle de plusieurs mois au moins, recommence l'observation de la même étoile.

J'ai de plus fait une supposition qui a été nécessaire par rapport à beaucoup d'observateurs, et qui ne peut avoir grand inconvénient en ce qui concerne les autres, à savoir que les observations de chaque jour du même observateur sont en général de la même exactitude, supposition que j'ai maintenue même pour les observateurs qui se sont efforcés d'évaluer les poids des observations de chaque jour par la concordance des mesures individuelles, par l'état de l'atmosphère, etc. Ce n'est que lorsque la série des observations comprend à peu près une vie entière, ou que l'on sait qu'il y a eu au milieu d'une telle série un changement essentiel d'instruments ou de méthode, que je l'ai divisée en plusieurs parties et déterminé séparément l'erreur moyenne de chacune d'elles.

En réduisant les observations des différentes saisons consécutives à des positions normales, j'ai voué une attention toute spéciale aux époques où, d'après les remarques mêmes de l'observateur, il est à supposer qu'il y ait eu des changements dans la méthode d'observer, et, pour ces époques-là, il a fallu une concordance plus qu'ordinaire entre les observations antérieures et postérieures, pour que je les réunisse dans une même position normale.

Toutefois, il m'a été impossible de suivre ce procédé sans y introduire des modifications pour les observateurs qui n'ont fait que des observations rares ou en petit nombre. Il y a même eu des cas où les matériaux ont été tellement insuffisants qu'ils n'ont donné qu'un résultat insignifiant ou nul.

J'ai enregistré en ordre chronologique les valeurs normales pour les deux coordonnées, leurs déviations de l'orbite (formule d'interpolation I.), et aux valeurs normales j'ai joint leurs erreurs moyennes calculées directement à l'aide de toutes les observations

individuelles qui ont servi à former les mêmes valeurs normales. J'y ai joint également les nombres des saisons d'observation et ceux des jours d'observation qui ont contribué à la formation de chaque valeur normale.

Distances						Angles de position					
Observateurs	r	Δr	Erreur moyenne	saisons	jours	Observateurs	R	ΔR	Erreur moyenne	saisons	jours
						1720					
						Bradley	356°·6	−2°·7	?	3	3
						1760					
						Bradley	327°·1	+1°·0	?	1	?
						1781					
W. Herschel	5″·31	+1″·78	±″·16	2	6						
						1798					
						W. Herschel	285°·4	− °·5	±1°·1	8	16
						1820					
						W. Struve	269°·33	+2°·25	± °·43	5	17
						1822					
						J. Herschel	266°·57	+ °·96	± °·13	1	4
						1823					
South	5″·08	+″·73	±″·16	4	8	South	265°·01	+ °·12	± °·20	4	10
W. Struve	5·09	+·74	?	1	1						
						1827					
W. Struve	4″·416	−″·042	±″·035	2	9						
						1828					
						W. Struve	261°·45	+ °·02	± °·18	5	19

Distances						Angles de position					
Observateurs	r	Δr	Erreur moyenne	saisons	jours	Observateurs	R	ΔR	Erreur moyenne	saisons	jours
					1830						
J. Herschel	4″·89	+″·35	±″·10	7	21	J. Herschel	259°·70	— °·40	± °·24	2	12
W. Struve	4·401	—·141	±·030	4	12						
					1831						
Bessel	4″·731	+″·161	±″·023	4	8	Bessel	259°·44	— °·01	± °·25	4	8
Dawes	4·565	—·005	±·065	1	4	Dawes	258·37	—1·08	± ·26	1	5
					1832						
						J. Herschel	259°·20	+ °·39	± °·33	1	9
					1833						
						J. Herschel	256°·95	—1°·23	± °·34	1	6
Selander	4″·766	+″·140	(±″·031)	1	2	Selander	258·08	— ·10	(± ·30)	1	2
					1834						
Dawes	4″·778	+″·124	±″·025	7	24	Dawes	257°·41	— °·14	± °·06	7	38
					1835						
Mädler	4″·678	—″·004	±″·024	3	14	Mädler	257°·09	+ °·16	± °·14	3	17
						W. Struve	256·09	— ·84	± ·27	4	12
					1836						
W. Struve	4″·731	+″·021	±″·018	3	10	Mädler	255°·56	— °·76	± °·10	1	8
					1838						
O. Struve	4″·825	+″·060	(±″·018)	1	3	O. Struve	254°·69	— °·43	(± °·57)	1	3
					1839						
Galle	5″·253	+″·460	±″·073	1	3	Galle	254°·30	— °·23	(± °·58)	2	3
					1840						
Kaiser	4″·714	—″·106	±″·045	1	7	Kaiser	254°·01	+ °·07	± °·24	2	7
O. Struve	4·974	+·154	±·022	1	7						

Distances						Angles de position					
Observateurs	r	Δr	Erreur moyenne	saisons	jours	Observateurs	R	ΔR	Erreur moyenne	saisons	jours
1841											
Dawes	4″·911	+″·064	±″·029	3	11	Dawes	253°·29	— °·07	± °·16	3	11
Kaiser	4·843	—·005	±·054	1	6	Kaiser	255·14	+1·78	± ·39	1	6
						O. Struve	254·54	+1·18	± ·10	2	9
1842											
Kaiser	4″·684	—″·191	±″·033	1	8	Kaiser	253°·00	+ °·21	± °·18	1	8
Mädler	4·832	—·043	±·060	2	9	Mädler	252·36	— ·43	± ·15	2	10
Schlüter	5·003	+·128	±·018	1	12	Schlüter	253·72	+ ·93	± ·23	1	12
O. Struve	4·770	—·105	(±·043)	1	2						
1843											
Encke	5″·439	+″·538	±″·070	3	4	Encke	250°·90	—1°·33	± °·52	3	4
Mädler	4·704	—·198	±·038	2	10	Mädler	251·47	— ·76	± ·08	2	12
						O. Struve	254·23	+2·00	(± ·61)	1	2
1844											
Mädler	4″·891	—″·037	±″·068	1	9						
1845											
Encke	5″·218	+″·263	±″·065	1	4	Encke	250°·82	— °·30	± °·35	1	3
O. Struve	5·111	+·156	±·022	5	13	O. Struve	250·65	— ·47	± ·20	3	9
1846											
						Hind	249°·79	— °·78	?°	?	?
Jacob	5″·046	+″·065	±″·101	2	4	Jacob	250·60	+ ·03	± ·21	2	4
Mädler	4·852	—·129	±·023	3	25	Mädler	249·60	— ·97	± ·05	4	37
1847											
Wichmann	5″·360	+″·353	(±″·019)	1	3	Wichmann	251°·56	+1°·53	(± °·18)	1	3
1848											
Bond	5″·193	+″·160	?″	?	?	Bond	249°·69	+ °·20	?	?	?
Dawes	5·052	+·019	±·020	3	9						
O. Struve	5·096	+·063	±·021	1	4						

Observateurs	r	Δr	Erreur moyenne	saisons	jours	Observateurs	R	ΔR	Erreur moyenne	saisons	jours
					1849						
O. Struve	5″·241	+″·183	±″·046	1	4	O. Struve	249°·98	+1°·02	± °·31	4	13
					1850						
O. Struve	5″·061	—″·023	±″·019	1	3						
					1851						
Dawes	5″·059	—″·050	±″·013	8	34	Dawes	247°·99	+ °·07	± °·08	8	35
						Mädler	247·46	— ·46	± ·13	3	16
					1852						
Fletcher	5″·097	—″·037	±″·026	2	12	Fletcher	248°·05	+ °·64	± °·10	2	12
Mädler	4·870	—·263	±·020	6	59	Mädler	246·30	—1·11	± ·20	1	14
Miller	5·048	—·085	±·021	1	4	Miller	247·59	+ ·18	± ·12	1	4
O. Struve	5·327	+·194	±·030	3	10	O. Struve	247·18	— ·23	± ·22	3	10
					1853						
						Dawes	246°·31	— °·59	± °·15	6	16
Dembowski	5″·714	+″·556	±″.099	1	5	Dembowski	244·80	—2·10	± ·24	1	5
						Mädler	246·50	— ·40	± ·17	1	9
Peters	5″·141	—″·017	(±″·023)	1	3	Peters	246·67	— ·23	(± ·20)	1	3
					1854						
Dembowski	5″·592	+″·410	±″·035	1	5	Dembowski	245°·54	— °·86	± °·26	1	5
Powell	5·362	+·180	(±·040)	1	2	Powell	246·46	+ ·07	± ·12	4	20
						Mädler	244·72	—1·67	± ·19	1	15
					1855						
Dembowski	5″·358	+″·152	±″·029	1	6	Mädler	245°·42	— °·47	± °·33	1	3
					1856						
Dembowski	5″·156	—″·073	±″·034	1	6	Dembowski	245°·72	+ °·32	± °·16	2	13
Luther	5·597	+·368	±·044	2	5	Luther	245·76	+ .36	± ·65	2	5
Secchi	5·372	+·143	±·045	1	7	Secchi	245·04	— ·36	± ·47	2	7
Winnecke	5·160	—·069	±·035	2	8	Winnecke	245·01	— ·39	± ·51	2	9
						O. Struve	216·07	+ ·67	± ·32	4	7

Distances						Angles de position					
Observateurs	r	Δr	Erreur moyenne	saisons	jours	Observateurs	R	ΔR	Erreur moyenne	saisons	jours
					1857						
Jacob	5″·227	—″·025	±″·056	2	6	Jacob	245°·48	+ °·57	± °·27	2	7
Mädler	4·902	—·350	±·029	5	24	Mädler	243·20	—1·71	± ·17	3	16
					1858						
O. Struve	5″·417	+″·142	±″·018	7	14	Mädler	244°·33	— °·09	± °·29	1	7
Morton	5·259	—·016	±·054	4	7	Morton	244·86	+ ·44	± ·32	3	7
					1859						
Powell	5″·147	—″·150	±″·080	1	5	Powell	243°·44	— °·50	± °·14	1	4
					1860						
Dawes	5″·429	+″·110	±″·029	3	8						
Mädler	5·114	—·205	±·035	2	21						
					1861						
Auwers	5″·630	+″·289	±″·039	4	9	Auwers	244°·05	+1°·06	± °·29	3	9
Mädler	4·987	—·354	±·065	1	9	Mädler	241·90	—1·09	± ·11	4	45
Powell	5·353	+·012	±·055	1	5	Powell	241·69	—1·30	± ·18	1	6
						O. Struve	242·79	— ·20	± ·31	4	9
					1862						
Mädler	5″·238	—″·124	±″·052	1	14						
O. Struve	5·212	—·150	(±·059)	1	2						
					1863						
Dembowski	5″·379	—″·004	±″·028	2	14	Dembowski	241°·65	— °·40	± °·12	2	14
Romberg	5·500	+·117	±·064	1	7	Romberg	243·06	+1·01	± ·64	1	7
Romberg	5·598	+·215	±·032	1	4	Romberg	242·30	+ ·25	± ·29	1	4
					1864						
Dawes	5″·567	+″·164	±″·058	3	5	Dawes	242°·09	+ °·50	± °·28	3	5

Distances						Angles de position					
Observateurs	r	Δr	Erreur moyenne	saisons	jours	Observateurs	R	ΔR	Erreur moyenne	saisons	jours
					1865						
Dawes	5″·758	+″·335	(±″·033)	1	2	Dawes	241°·71	+ °·58	± °·12	2	5
Engelmann	5·435	+·012	±·055	2	15	Engelmann	241·94	+ ·81	± ·19	2	15
Kaiser	5·499	+·075	±·030	1	11	O. Struve	242·23	+1·10	± ·36	2	5
Main	5·423	—·001	±·016	6	12	Main	240·68	— ·45	± ·84	6	12
					1866						
Kaiser	5″·210	—″·233	±″·042	1	6	Kaiser	241°·76	+1°·09	± °·27	2	7
Kaiser	5·161	—·282	±·055	1	9	Kaiser	241·31	+ ·64	± ·45	1	9
O. Struve	5·442	—·001	±·026	3	7						
					1867						
Dembowski	5″·400	—″·062	±″·024	4	17	Dembowski	240°·72	+ °·50	± °·11	5	19
Knott	5·586	+·123	±·041	4	7	Knott	239·15	—1·07	± ·23	4	7
					1868						
Dembowski[1]	*5″·443*	*—″·038*	*±″·018*	*12*	*47*						
Talmage	5·396	—·085	±·061	5	8	Talmage	241°·98	+2°·21	± °·42	5	7
					1869						
Brünnow	5″·708	+″·208	±″·075	1	4	Brünnow	239°·07	— °·25	±1°·21	1	4
O. Struve	5·539	+·039	±·029	3	7						
					1870						
Dunér	5″·400	—″·118	±″·023	2	13	Dunér	239°·02	+ °·14	± °·14	4	18
						O. Struve	238·10	— ·78	± ·26	7	17
					1872						
Dunér	5″·633	+″·080	±″·046	3	7						
Gledhill	5·649	+·096	±·027	4	5	Gledhill	237°·54	— °·46	± °·28	5	10
O. Struve	5·677	+·124	±·033	2	5						

[1]) Moyenne des autres distances normales pour 1863, 1867 et 1875 du même observateur.

Distances						Angles de position					
Observateurs	r	Δr	Erreur moyenne	saisons	jours	Observateurs	R	ΔR	Erreur moyenne	saisons	jours
1873											
Dunér [1]	*5″530*	*—″039*	*±″019*	*9*	*40*	*Dunér*	*238°08*	*+ °51*	*± °15*	9	*40*
Wilson & Seabroke	5·735	+·1[illegible]6	?	3	5	Wilson & Seabroke	237·52	— ·05	?	4	11
1874											
Dunér	5″429	—″157	(±″066)	1	3	Dunér	238°49	+1°36	± °34	2	5
1875											
Bellamy	6″002	+″400	(±″156)	2	3	Bellamy	237°77	+1°07	(±1°24)	2	3
Dembowski	5·561	—·041	±·038	6	16	Dembowski	236·43	— ·27	± ·24	5	14
						O. Struve	236·95	+ ·24	± ·39	3	8
1876											
Doberck	5″779	+″162	±″068	1	5	Doberck	234°92	—1°36	± °29	1	12
Dunér	5·610	—·007	±·022	3	17	Dunér	236·92	+ ·64	± ·26	3	17
Sciaparelli	5·577	—·040	± ?	2	13	Sciaparelli	234·98	—1·30	± ?	2	13
Waldo	5·307	—·310	± ?	1	?	Waldo	242·98	+6·70	± ?	1	?
O. Struve	5·594	—·023	±·025	6	17						
1877											
Plummer	5″587	—″044	±″055	2	5	Plummer	234°00	—1°86	± °49	2	7
						O. Struve	234·29	—1·57	(± ·59)	1	3
1878											
Doberck	5″583	—″063	(±″088)	2	3	Doberck	234°83	— °60	(± °58)	2	3
Doberck	5·393	—·253	(±·072)	1	3	O. Struve	235·77	+ ·33	(± ·59)	1	3

[1]) Moyennes des autres positions normales de 1870, 1872, 1874 et 1876 du même observateur.

Pour obtenir un résultat essentiellement meilleur, il faudrait pouvoir corriger les erreurs systématiques, ce qui est impossible pour le moment. Mais quoiqu'on ne puisse pas compter sur

une amélioration certaine seulement en répétant le calcul de l'orbite et en le fondant sur ces positions normales, j'ai cependant fait cette répétition dans le but de représenter un peu mieux les observations modernes, en négligeant celles de Bradley et de W. Herschel. La question de la variabilité des erreurs systématiques ne peut être d'aucune importance pour les mesures de ces anciens observateurs, et, d'un autre côté, il importe de s'approcher autant que possible des mesures des observateurs modernes, pour pouvoir soumettre à une critique fondée leurs erreurs systématiques.

Après les formules

$$E - [1{\cdot}23291] \sin E = - \tfrac{1}{2}\,(t - 1745{\cdot}16)$$

$$r \cos R = [0{\cdot}72636] \cos (E + 333^{\circ}\ 24'{\cdot}04) - 1''{\cdot}4209 \qquad \text{II}$$

$$r \sin R = [0{\cdot}71448] \cos (E + 253^{\circ}\ 41'{\cdot}33) + ''{\cdot}4343$$

on trouve les corrections suivantes pour l'éphéméride antérieure

	Δr	ΔR
1820	$+''{\cdot}078$	$-^{\circ}{\cdot}49$
30	$+{\cdot}050$	$-.26$
40	$+{\cdot}022$	$-{\cdot}15$
50	$-{\cdot}000$	$-{\cdot}10$
60	$-{\cdot}006$	$-{\cdot}08$
70	$+{\cdot}010$	$-{\cdot}06$
80	$+{\cdot}053$	${\cdot}00$

Je donne dans les pages suivantes, par ordre alphabétique d'après les noms des observateurs, les résultats de ma critique des erreurs systématiques. Après une citation des oeuvres et des publications périodiques où j'ai trouvé les observations, lesquelles ne seront peut-être pas inutiles pour d'autres calculateurs des étoiles doubles, et une courte description des propriétés générales des observations, j'établis pour chaque observateur une comparaison entre les positions normales déduites de ses observations et mes formules II (observation ÷ formule), en l'accompagnant des erreurs moyennes correspondantes, qui sont calculées en raison du nombre des jours d'observation employés

dans la formation de chaque position normale, et de l'erreur moyenne pour 1 jour d'observation, calculée pour toute la série des observations en supposant:

1) que l'exactitude a été la même pour chaque jour,
2) qu'il n'y a pas eu de variation d'erreur systématique pendant une saison d'observation,
3) que l'erreur systématique peut avoir subi des variations entre deux saisons consécutives quelconques.

Pour chaque valeur normale, les dates de la première et de la dernière observation sont données en dixièmes d'année. Viennent ensuite les valeurs des erreurs moyennes pour 1 jour et les remarques spéciales auxquelles m'ont conduit l'étude de ces prémisses.

Dans ces remarques, je parlerai quelquefois des valeurs absolues des erreurs systématiques, ce qui à la rigueur n'est pas permis dans ces recherches, où n'entrent que les différences entre ces valeurs absolues. L'explication en est, ou que les observations en question ont donné des valeurs extrêmes en contradiction avec toutes les autres observations contemporaines, ou que j'ai voulu éviter une répétition fatigante des mots *variations* ou *changements des erreurs systématiques*.

A. Auwers. Astr. Nachr. N. 1393. Héliomètre de Königsberg

$1859\cdot8$—$1861\cdot8$: $+''\!\cdot294 \pm ''\!\cdot039$, $+1^{\circ}\!\cdot14 \pm {}^{\circ}\!\cdot29$

Erreur moyenne de l'observation d'un jour: $''\!\cdot119$, ${}^{\circ}\!\cdot87$; les erreurs systématiques sont probablement considérables.

F. Bellamy. Radcliffe obs. Vol. 34 et 35. Héliomètre d'Oxford

$1874\cdot2$—$1875\cdot2$: $+''\!\cdot372 \pm ''\!\cdot156$, $+1^{\circ}\!\cdot10 \pm 1^{\circ}\!\cdot24$

Erreur moyenne d'un jour ($''\!\cdot269$, $2^{\circ}\!\cdot14$); distances trop grandes.

F. W. Bessel. Astr. Beob. auf der K. U. Sternwarte in Königsberg. Vol. 16, 17, 18 et 24. Héliomètre de Königsberg.

$1830\cdot4$—$1833\cdot3$: $+''\!\cdot114 \pm ''\!\cdot023$, $+ {}^{\circ}\!\cdot24 \pm {}^{\circ}\!\cdot25$

Erreur moyenne d'un jour: $''\!\cdot066$, ${}^{\circ}\!\cdot71$; s'il y a des erreurs

systématiques, elles sont au moins restées constantes pendant l'espace de temps qu'embrassent les observations.

Bradlay. Memoirs of the. R. A. S. Vol. V. pg. 27; Phil. transactions 1802. Sans micromètre. Les angles de position déterminés par alignement.

1718·2—1722·8 : .... , $-11^{\circ}\!\cdot\!0 \pm 8^{\circ}\!\cdot\!2$
1759 —1760 : .... $+ 1\cdot7 \pm 5\cdot3$

Erreur moyenne d'un jour $5^{\circ}\!\cdot\!3$; la réduction de J. Herschel a été revisée, et la correction appliquée par lui a été mise hors de considération, quoiqu'il soit très probable qu'il y ait une erreur systématique de l'espèce supposée par Herschel; mais sa valeur numérique me semble douteuse et indéterminable.

F. Brünnow. Astr. Observ. and Res. made at Dunsink, Vol. 1; Réfracteur de $11\frac{3}{4}$ pouces; micromètre filaire.

1869·0—1869·3 : $+\,''\!\cdot\!201 \pm ''\!\cdot\!075$, $-\,^{\circ}\!\cdot\!19 \pm 1^{\circ}\!\cdot\!21$

Erreur moyenne d'un jour ($''\!\cdot\!149$, $2^{\circ}\!\cdot\!44$); il est à craindre qu'il n'y ait des erreurs systématiques tant dans les distances que dans les angles de position; quant à ceux-ci, il semble que leur erreur systématique, pour les deux observations faites de nuit, est différente de celle relative aux deux observations faites de jour; de là la grandeur excessive de l'erreur moyenne.

W. C. Bond. Cité par Dawes dans les Mem. of the R. A. S. vol. 35 pg. 334.

1848 : $+\,''\!\cdot\!157$, $+\,^{\circ}\!\cdot\!30$

il n'y a qu'une seule moyenne qui me soit connue.

W. R. Dawes. Mem. of the R. A. S. vol. 5, 8, 19, 35; 3 ou 4 lunettes différentes pas trop puissantes; 4 micromètres filaires différents, et autant de micromètres différents à double image, tantôt avec l'application de la lentille dite de Barlow, tantôt sans elle.

a) micromètres filaires

1831·0—1831·3 :	$-''\!\cdot052 \pm ''\!\cdot057$	$-\,^{\circ}\!\cdot83 \pm {}^{\circ}\!\cdot17$
1832·0—1839·3 :	$+\cdot085 \pm \cdot023$	$+\cdot07 \pm \cdot06$
1840·0—1842·3 :	$+\cdot045 \pm \cdot029$	$+\cdot06 \pm \cdot15$
1847·0—1860·3 :	$-\cdot048 \pm \cdot013$	$+\cdot16 \pm \cdot07$
1863·3—1865·3 :	$+\cdot166 \pm \cdot033$	$+\cdot58 \pm \cdot17$

b) micromètres à double image

1843·0—1853·1	$+''\!\cdot016 \pm ''\!\cdot030$,	
1843·0—1860·3	.... ,	$-\,^{\circ}\!\cdot50 \pm {}^{\circ}\!\cdot12$
1857·0—1864·3	$+\cdot116 \pm \cdot032$,	
1864·3—1865·3	.... ,	$+\cdot65 \pm \cdot22$
1865·3	$+\,325 \pm \cdot063$,	

Erreur moyenne d'un jour a) micromètres filaires avant 1840: $''\!\cdot114$, $^{\circ}\!\cdot38$; 1840—1843: $''\!\cdot096$, $^{\circ}\!\cdot47$; depuis 1846: $''\!\cdot075$, $^{\circ}\!\cdot38$; b) micromètres à double image: $''\!\cdot089$, $^{\circ}\!\cdot47$. C'est une longue série d'observations excellentes. Abstraction faite de ses premières années d'observation et des dernières, qui furent aussi les dernières de sa vie, dans lesquelles on trouve des différences, qui sont sans aucun doute systématiques, il y a ici un travail d'une trentaine d'années, qui se distingue non-seulement par la petitesse des déviations accidentelles entre les observations de la même saison (quant aux angles de position l'erreur moyenne est extrêmement petite), mais aussi par la circonstance que, malgré l'étendue de cette période d'observation et la grande différence des instruments employés, il ne présente qu'une seule trace relativement certaine d'erreurs systématiques, consistant en une différence entre les observations faites avec les micromètres filaires, d'un côté, et celles faites avec les micromètres à double image, de l'autre.

Quant aux angles de position, la différence entre les deux espèces d'observations est même constante $= 0^{\circ}\!\cdot6$, et chacune des différentes séries aurait sans inconvénient pu être réunie en une seule valeur normale, si en même temps

on ne se fût pas privé d'un moyen précieux pour la détermination des variations de cette coordonnée.

Le micromètre à double image a généralement donné des distances plus grandes que le micromètre filaire, mais la différence n'est pas constante. Les distances mesurées avec ce dernier semblent par des raisons internes être les meilleures, et elles auraient aussi comme les angles de position pu être réunies en une seule valeur normale, si cela n'avait pas eu l'inconvénient susdit. Quant aux mesures des distances avec le micromètre à double image, elles semblent avoir subi, entre 1853 et 1857, un petit changement dont la nature est un peu douteuse.

Si on compare enfin les observations de Castor par Dawes avec celles d'autres observateurs, qui diffèrent souvent considérablement entr'eux, il faut dire à son éloge que ses observations se maintiennent généralement dans un juste milieu.

H. Dembowski. Astr. Nachr. Jusqu'en 1856, un dialyte de Plössl sans mouvement diurne et sans cercle de position; depuis 1862, un réfracteur de Merz avec micromètre filaire.

1853·3	: +″·560 ±″·099 ,	−2°·01 ± °·27
1854·2	: +·415 ±·035 ,	− ·76 ± ·27
1855·0—1855·3	: +·158 ±·032 ,	
1855·0—1856·4	: .... ,	+ ·41 ± ·16
1856·1—1856·4	: −·067 ±·032 ,	
1862·7—1863·4	: ″·000 ±″·028 ,	− °·32 ± °·12
1865·2—1870·4	: −·066 ±·025 ,	
1865·2—1871·3	:	+ ·57 ± ·11
1871·2—1877·4	: −·069 ±·040 ,	
1872·2—1877·4	:	− ·24 ± ·28

Erreur moyenne d'un jour en 1853 pour la distance: ″·224; pour le reste jusqu'à 1856: ″·079, °·59; 1862—1871 ou 1872: ″·109, °·46; depuis 1871 ou 1872: ″·161, 1°·04. Il y a ici

deux séries d'observations très hétérogènes quant aux moyens et aux méthodes employés et quant à la valeur intrinsèque des observations.

Les mesures de la première série, comprenant les premières quatre années, ont été sujettes à des erreurs systématiques grandes et variables; elles montrent une diminution de la distance et un accroissement de l'angle de position, tandis qu'en réalité le contraire a eu lieu. Les variations de l'erreur systématique ont été probablement des améliorations produites par un exercice continu, et il semble que Dembowski, avant de quitter son premier instrument si imparfait, ait su par sa rare persistance lui arracher des observations assez bonnes.

La supériorité de la seconde série est indubitable, quoiqu'elle ne se manifeste pas par une concordance absolument plus parfaite entre les observations des jours consécutifs, ce qui s'explique naturellement par la diminution que Dembowski a fait subir au nombre des mesures individuelles réunies dans chaque observation. D'ailleurs, il semble que Dembowski ait, en 1871 ou 1872, changé de méthode d'observation, changement qui a eu pour conséquence une augmentation de l'erreur moyenne des deux coordonnées; mais, comme il est probablement accompagné d'une variation de l'erreur systématique au moins de l'angle de position, c'est peut-être précisément celui qu'il fallait faire pour purger les observations des erreurs systématiques, et, dans ce cas, la perte d'exactitude des observations individuelles se trouverait compensée. Il paraît y avoir eu aussi une petite variation d'erreur systématique, surtout dans les angles de position, entre 1863 et 1865, où il y a une lacune d'un an.

Les mesures de la distance de la dernière série auraient, sans en accroître sensiblement l'erreur moyenne, pu être réunies en une seule valeur normale pour 1868:

$$1862{\cdot}7-1877{\cdot}4 : -0''{\cdot}044 \pm 0''{\cdot}018.$$

W. Doberck. Astr. Nachrichten vol. 92. Réfracteur de l'observatoire de Makree, a) micromètres filaire, b) micromètre à double image d'Amici.

a) 1876·0—1876·3 : +″·130 ±″·068 , —1°·33 ± °·29
1877·3—1878·1 : —·105 ±·088 , — ·59 ± ·58

b) 1878·2 : —″·295 ±″·072

Erreur moyenne d'un jour, micromètre filaire: (″·153 , 1°·00); micromètre à double image: (″·124). Il y a probablement des erreurs systématiques considérables et variables.

N. C. Dunér. Mesures micrométriques d'étoiles doubles et communication par lettre. Réfracteur de Lund, micromètre filaire.

1869·3—1870·4 : —″·128 ±″·028 ,
1869·3—1872·3 : .... , + °·20 ± °·22
1871·3—1873·3 : +·064 ±·037 ,
1872·3—1874·3 : .... , +1·39 ± ·42
1874·3 : —·181 ±·057 ,
1875·3—1878·3 : —·039 ±·024 , + ·67 ± ·23

Erreur moyenne d'un jour: ″·*099* , °·*94*. Toute la série des observations de Dunér peut, sans que l'erreur moyenne en soit considérablement accrue, être réduite à cette seule position normale pour 1873

1869·3—1878·3 : —″·060 ±″·019 , + °·56 ± °·15

Mais j'ai préféré d'en former un nombre plus grand, parce qu'il y a entre les observations des différentes saisons quelques différences, qui, quoique peu prononcées, font supposer qu'elles sont affectées d'erreurs systématiques. Les corrections pour la périodicité de la vis et pour les erreurs physiologiques déterminées par des mesures d'étoiles doubles artificielles n'ont pas été appliquées ici.

J. F. Encke. Astr. Beob. auf der K. Sternwarte zu Berlin vol. 1 et vol. 3. Réfracteur de Berlin.

a) micromètre filaire

1836·9—1845·3 : +″·524 ±″·070 , —1°·20 ± °·52,

b) micromètre à double image d'Amici

$$1845{\cdot}3 \quad : +''{\cdot}254 \pm ''{\cdot}065\,,\ -{}^{\circ}{\cdot}18 \pm {}^{\circ}{\cdot}35$$

Erreur moyenne d'un jour: a) ($''{\cdot}140$, $1^{\circ}{\cdot}04$); b) ($''{\cdot}130$, ${}^{\circ}{\cdot}61$). Les erreurs systématiques des distances sont grandes.

R. Engelmann. Messungen von 90 Doppelsternen, Ast. Nachr. vol. 64 et vol. 70. Réfracteur de Leipzig, micromètre filaire.

$$1864{\cdot}1\text{—}1865{\cdot}5 : +''{\cdot}012 \pm ''{\cdot}055\,,\ + {}^{\circ}{\cdot}88 \pm {}^{\circ}{\cdot}19$$

Erreur moyenne d'un jour: $''{\cdot}216$, ${}^{\circ}{\cdot}72$. L'erreur moyenne considérable des distances fait soupçonner une variabilité des erreurs systématiques.

I. Fletcher. Memoirs of the R. A. S. vol. 22. Réfracteur de six pieds, micromètre filaire.

$$1851{\cdot}0\text{—}1852{\cdot}1 : -''{\cdot}034 \pm ''{\cdot}026\,,\ + {}^{\circ}{\cdot}74 \pm {}^{\circ}{\cdot}10$$

Erreur moyenne d'un jour: $''{\cdot}091$, ${}^{\circ}{\cdot}36$. C'est dommage que la série de ces observations soit si courte.

J. G. Galle. Astr. Beob. auf der K. Sternwarte zu Berlin vol. 1; réfracteur de Berlin, micromètre filaire.

$$1836{\cdot}9\text{—}1839{\cdot}4 : +''{\cdot}436 \pm ''{\cdot}073\,,\ - {}^{\circ}{\cdot}07 \pm {}^{\circ}{\cdot}58$$

Erreur moyenne d'un jour ($''{\cdot}128$, $1^{\circ}{\cdot}01$). La distance est trop grande.

J. Gledhill. Mem. of the R. A. S. vol. 42; réfracteur de $9\frac{1}{3}$ inch. d'ouverture, micromètre filaire.

$$1870{\cdot}3\text{—}1874{\cdot}3 : +''{\cdot}083 \pm ''{\cdot}027\,,\ - {}^{\circ}{\cdot}41 \pm {}^{\circ}{\cdot}28$$

Erreur moyenne d'un jour: $''{\cdot}062$, ${}^{\circ}{\cdot}89$. Les distances de 1874 sont beaucoup moins exactes que les antérieures; l'erreur moyenne s'accroît jusqu'à $''{\cdot}243$, tandis qu'il n'y a pas de différence systématique entre ces observations et celles qui les précèdent.

J. Herschel. Phil. transactions 1824 et 1826. Mem. of the R. A. S. vol. 5 et vol. 8; en 1817, il a observé avec un

réflecteur de 7 pieds et depuis, avec un réfracteur de la même longueur; micromètre filaire.

1817·0—1828·7 : .... +1°·39 ± °·41
1829·9—1831·9 : .... — ·14 ± ·26
1821·2—1833·1 : +″·295 ±″·101 ,
1831·7—1832·2 : .... + ·62 ± ·30
1833·1—1833·2 : .... —1·01 ± ·37

Erreur moyenne d'un jour: ″·460, °·91. On sait que J. Herschel n'a pas réussi à faire de bonnes mesures des distances. Les mesures des angles de position méritent au contraire la même confiance que les meilleures entre les modernes, quoiqu'il soit probable qu'il y ait des erreurs systématiques, pas tout à fait constantes.

Ce contraste entre ses mesures des deux coordonnées a eu des conséquences bien graves. Il a induit J. Herschel et, par l'autorité de ce grand astronome, beaucoup d'autres calculateurs d'orbites, à baser leurs calculs exclusivement sur les mesures des angles de position, quoique, en réalité, il soit bien souvent préférable de calculer ces angles par les distances mesurées; car, avec des données empiriques, on peut exécuter une intégration plus exactement que la différentiation correspondante.

W. Herschel. Mem. of the R. A. S. vol. 35.

1779·8—1781·2 : +1″·77 ±″·16
1779·8—1803·2 : .... , + °·90 ±1°·12

Erreur moyenne d'un jour: ″·39, 4°·4. Les erreurs systématiques énormes des distances proviennent, au moins en partie, de ce que Herschel n'a pas mesuré la distance entre les centres des petits disques stellaires; mais, dans les angles de position, il y a aussi des erreurs tellement considérables, que les mesures de W. Herschel ne peuvent avoir qu'une importance secondaire pour la détermination de l'orbite.

Hind. Cité par Dawes dans Mem. of the R. A. S. vol. 35 pg. 334.

1845—1846 — °·67

Erreur moyenne inconnue.

W. S. Jacob. Mem. of the R. A. S. vol. 16 et vol. 28; Madras; en 1845—46, un télescope de Dollond de 5 pieds; depuis lors, un réfracteur de 6·3 inch. d'ouverture, micromètre filaire.

1845·8—1846·7 : +″·058 ±″·085 , + °·14 ± °·21
1856·7—1857·8 : —·019 ±·069 , + ·66 ± ·16

Erreur moyenne d'un jour: ″·169, °·42. Les observations sont trop rares pour qu'on puisse en tirer des conclusions sur leurs erreurs systématiques.

Kaiser. Eerste Metingen met den Mikrometer; Astr. Nachr. Vol. 64; Annalen der Leidener Sternwarte. Vol. III.; les réfracteurs de Leyden de 6″ et de 7″ d'ouverture, a) micromètre filaire, b) micromètre d'Amici.

a) 1839·9—1840·2 : —″·128 ±″·045 , + °·22 ± °·23
1841·3—1841·4 : —·023 ±·054 , +1·91 ± ·39
1842·3—1842·4 : —·207 ±·033 , + ·34 ± ·18
1866·[illegible]—1866·3 : —·283 ±·055 , + ·71 ± ·45

b) 1865·3—1865·4 : +″·076 ±″·030
1865·3—1866·4 : .... +1°·17 ± °·27
1866·4 : —·234 ±·042

Erreur moyenne d'un jour a) 1840—42: ″·114, °·70; en 1866: ″·165, 1°·34; b) ″·095, °·70. Il y a des erreurs systématiques variables surtout dans les distances.

G. Knott. Mem. of the R. A. S. vol. 43. Réfracteur de $7\frac{1}{3}$ inch., micromètre filaire.

1864·8—1872·0 : +″·120 ±″·041 , —1°·00 ± °·23

Erreur moyenne d'un jour: ″·109, °·61. Les observations sont trop peu nombreuses et trop rares pour qu'on puisse en tirer des conséquences relativement aux erreurs systématiques.

E. Luther. Astr. Beob. auf der K. U. Sternwarte zu Königsberg vol. 31; Héliomètre de Königsberg.

1855·3—1856·4 : +″·374 ±″·044 , + °·45 ± °·65

Erreur moyenne d'un jour: ″·098, 1°·45. La distance sans doute est trop grande, plus grande en 1855 qu'en 1856. Les angles de position, au nombre de 5, concordent assez mal entre eux.

Mädler (jusqu'à 1835, en compagnie avec Beer). Astr. Nachr. vol. 12, 13 et 14; Beobachtungen der K. U. Sternwarte, Dorpat, vol. 9, 10, 11, 13, 15; Untersuchungen über Fixsternsysteme. Jusqu'à 1836, un réfracteur de Frauenhofer de 4½ pieds; depuis lors le réfracteur de Dorpat. Micromètre filaire.

1833·4—1835·8 :	″ .... ″ ,	+ °·35 ± °·13
34·3— 36·7 :	—·040 ±·024 ,	
36·2— 36·8 :	.... ,	— ·57 ± ·19
1840·8—1842·3 :	—·059 ±·046 ,	— ·30 ± ·11
42·7— 43·8 :	—·211 ±·044 ,	— ·63 ± ·10
44·3— 44·4 :	—·049 ±·046 ,	
45·1— 47·4 :	—·136 ±·028 ,	
44·3— 48·4 :	.... ,	— ·86 ± ·05
1850·4—1851·8 :	.... ,	— ·37 ± ·19
48·3— 54·4 :	—·261 ±·020 ,	
52·3— 52·7 :	.... ,	—1·01 ± ·20
53·3— 53·4 :	.... ,	— ·31 ± ·25
54·2— 54.4 :	.... ,	—1·58 ± ·19
54·8— 54·8 :	.... ,	— ·39 ± ·42
55·3— 57·4 :	.... ,	—1·62 ± ·19
54·8— 58·4 :	—·344 ±·031 ,	
58·4— 58·4 :	.... ,	— ·01 ± ·28
1859·3—1860·4 :	—·199 ±·040 ,	
59·3— 62·4 :	.... ,	—1·01 ± ·11
61·3— 61·4 :	—·349 ±·061 ,	
62·2— 62·4 :	—·120 ±·049 ,	

Erreur moyenne d'un jour avant 1837 : *″·088* , *°·53* ; 1840—1848 : *″·139* , *°·85* ; 1850—1858 : *″·156* , *°·74* ; depuis 1858 : *″·183* , *°·74*.

L'exactitude des observations de Dorpat décroît donc avec le temps, ce qui, je suppose, est la conséquence d'une diminution du nombre des mesures de chaque jour. Les mesures des angles de position de chaque saison d'observation concordent au commencement très bien entr'elles, tandis que les mesures des distances des dernières années ne s'accordent que médiocrement; voir les erreurs moyennes d'un jour.

Mädler se distingue surtout des autres observateurs par le grand nombre de ses observations, ce qui nous aide à en déterminer l'erreur moyenne et à en faire la critique avec une sûreté de beaucoup supérieure à celle qu'offrent les observations de la plupart des autres astronomes. Les erreurs moyennes des positions normales deviennent petites même là où les observations de chaque jour ne sont que peu exactes; il en résulte que les petites variations des erreurs systématiques se relèvent plus distinctement chez Mädler que chez les autres observateurs, et qu'il faudrait, *ceteris paribus*, répartir les observations de Mädler sur un nombre de positions normales plus considérable que d'ordinaire.

En effet, si on regarde la table d'erreurs ci-dessus, on verra que j'ai formé de ces observations un nombre assez grand de positions normales remarquables par des variations des erreurs systématiques, qui sont assez grandes relativement aux petites erreurs moyennes, mais assez petites en mesure absolue. Parmi ceux qui ont observé Castor pendant de longues périodes, il n'y en a que peu qui aient eu des erreurs systématiques moins variables.

Il résulte donc de la critique interne des observations de Mädler (c'est-à-dire sans les comparer à celles des autres), que leur valeur doit être considérable. Pour les soumettre à une dernière épreuve, j'ai recherché si la répartition des erreurs était en désharmonie avec la loi exponentielle des erreurs; mais le résultat de cette recherche a été assez

négatif, car je n'ai pas trouvé de déviations de la dite loi qui puissent être reconnues avec le nombre actuel des observations réparties sur tant d'années, et pour une étoile double ayant la vitesse de mouvement relatif de Castor.

Mais si on compare les résultats de Mädler à ceux des autres observateurs contemporains, ou à notre éphéméride, qui, on peut le présumer, en représente la moyenne, on reconnaît évidemment qu'ils sont affectés d'erreurs systématiques assez constantes, il est vrai, mais très considérables; ses distances surtout sont constamment plus petites que celles des autres observateurs.

Par cette raison, on ne pourra utiliser pleinement les observations de Mädler avant qu'on ait déterminé avec une grande exactitude les valeurs numériques de ses erreurs systématiques et de leurs variations avec le temps. Il est à regretter que Mädler n'ait pas cherché à déterminer lui-même ses erreurs systématiques, car il y a d'autres étoiles doubles dont les mesures mal réussies faites par lui offriront peut-être de grandes difficultés à la critique.

R. Main. Radcliffe observ. 1861, 62, 63, 64, 70 et 71; Héliomètre d'Oxford.

$$1861{\cdot}1\text{—}1871{\cdot}3 : \quad {}^{\prime\prime}{\cdot}000 \pm {}^{\prime\prime}{\cdot}049\,, \; - {}^{0}{\cdot}38 \pm {}^{0}{\cdot}86$$

Erreur moyenne d'un jour: $^{\prime\prime}{\cdot}171$, $2^{0}{\cdot}97$. Les observations sont trop rares et trop peu nombreuses pour donner des résultats relativement aux erreurs systématiques. Les erreurs des angles de position sont très grandes, mais non systématiquement réparties.

I. F. Miller. Astr. Nachr. vol. 33. Réfracteur de 4·1 inches; micromètre filaire.

$$1851{\cdot}9 \quad : - {}^{\prime\prime}{\cdot}083 \pm {}^{\prime\prime}{\cdot}021\,, \; + {}^{0}{\cdot}28 \pm {}^{0}{\cdot}12$$

Erreur moyenne d'un jour: ($^{\prime\prime}{\cdot}042$, $^{0}{\cdot}24$). Quatre jours d'observation.

F. Morton. Mem. of the R. A. S. vol. 29. Réfracteur de $7\frac{3}{4}$ inches de Lord Wrottesley; micromètre filaire.

1852·2—1859·9 : —″·010 ±″·054 , + °·52 ± °·32

Erreur moyenne d'un jour: ″·143 , °·85. Une variation des erreurs systématiques me paraît probable; toutefois, comme il n'y a que 7 observations de quatre saisons différentes, je les ai réduites à une seule valeur normale.

C. A. F. Peters. Astr. Nachr. vol. 44. Héliomètre de Königsberg.

1853·2—1853·3 : —″·013 ±″·023 , — °·14 ± °·20

Erreur moyenne d'un jour: (″·040 , °·34). Il n'y a que trois observations, qui concordent très bien ensemble.

W. E. Plummer. Astr. Observ. made at the observatory Oxford vol. 1; micromètre filaire.

1876·4—1877·1 : —″·082 ±″·055 , —1°·83 ± °·49

Erreur moyenne d'un jour: ″·123 , 1°·30. Il paraît y avoir des erreurs systématiques, surtout dans les angles de position.

E. B. Powell. Mem. of the R. A. S. vol. 25 et 32. Réfracteur de 4 inches de Madras; micromètre filaire.

1853·1—1856·0 : +″·185 ±″·106 , + °·16 ± °·12
1859·3—1859·4 : —·144 ±·067 , — ·42 ± ·26
1861·0—1861·1 : +·017 ±·067 , —1·22 ± ·21

Erreur moyenne d'un jour: ″·140 , °·52. Il y a probablement des erreurs systématiques variables dans les deux coordonnées. Powell a, pendant plusieurs années, tout à fait négligé les mesures des distances, sans doute comme conséquence de la proposition malencontreuse de John Herschel de ne donner aux distances qu'une importance secondaire pour la détermination de l'orbite. C'est surtout pour les étoiles doubles du ciel austral que l'absence des mesures des distances est fort fâcheuse.

H. Romberg. Leyton ast. obs. vol. 1. Réfracteur de 10 inch. de Mr. Barclay; a) micromètre filaire, b) micromètre à double image.

a) 1862·8—1863·3 : +″·121 ±″·064 , +1°·09 ± °·64
b) 1863·1—1863·2 : +·219 ±·032 , + ·33 ± ·29

Erreur moyenne d'un jour: a) ″·168, 1°·69, b) (″·066, °·51). Il y a probablement des erreurs systématiques assez variables dans les deux coordonnées.

Schlüter. Astr. Beob. der K. U. Sternwarte in Königsberg vol. 24. Héliomètre de Königsberg.

1842·2—1842·4 : +″·112 ±″·018 , +1°·06 ± °·23

Erreur moyenne d'un jour: ″·060, °·79. S'il y a des erreurs systématiques, elles ne semblent pas avoir varié pendant la courte période qu'embrassent les observations.

I. V. Schiaparelli. Astr. Nachr. vol. 89. Réfracteur de Merz de 218mm d'ouverture; micromètre filaire.

1875—1877 : —″·072 , —1°·27

Dans la communication provisoire citée il n'y a que deux moyennes.

A. Secchi. Mem. del' osserv. del Collegio Romano. Réfracteur de Merz, micromètre filaire.

1855·1—1856·4 : +″·149 ±″·045 , — °·27 ± °·47

Erreur moyenne d'un jour: ″·120, 1°·25. Il y a probablement des erreurs systématiques assez variables dans les deux coordonnées.

Selander. Astr. Beob. der K. U. Sternwarte in Königsberg vol. 24. Héliomètre de Königsberg.

1833·3 : +″099 ±″·031 , + °·12 ± °·30

Erreur moyenne d'un jour: (″·045, °·42). Il n'y a que 2 observations.

J. South. Phil. trans. vol. 26.

1821·2—1825·3 : +″·665 ±″·159 , +°·53 ±°·20

Erreur moyenne d'un jour: (″·450, °·62). Les distances sont trop grandes et les angles de position, assez bons, tout comme chez J. Herschel, avec lequel il observait en commun.

O. Struve. Additamenta in mens. micr. pour 3 observations de Dorpat, en 1838. Observations de Poulkova Vol. IX.; communications par lettres. Réfracteurs de Dorpat et de Poulkova, micromètre filaire.

1838·3	: +″·033 ±″·018 ,	— °·26 ± °·52,
1840·2—1840·4	: +·132 ±·025 ,	
1840·2—1842·3	:	+1·31 ± ·29,
1842·3	: —·121 ±·047 ,	
1843·3	:	+2·13 ± ·61,
1843·3—1847·3	: +·147 ±·019 .	
1844·3—1846·3	:	— ·35 ± ·29,
1848·2—1848·3	: +·060 ±·033 ,	
1847·2—1850·3	:	+1·12 ± ·24,
1849·2—1849·3	: +·181 ±·033 ,	
1850·3	: —·023 ±·038 ,	
1851·3—1853·3	: +·196 ±·021 ,	— ·13 ± ·30,
1854·2—1858·3	:	+ ·76 ± ·39,
1854·2—1861·3	: +·148 ±·025 ,	
1859·3—1862·7	:	— ·12 ± ·34,
1862·3—1862·7	: —·146 ±·067 ,	
1864·2—1866·3	:	+1·17 ± ·46,
1864·2—1867·3	: —·002 ±·036 ,	
1867·2—1873·3	:	— ·72 ± ·25,
1868·2—1870·3	: +·032 ±·036 ,	
1871·2—1872·3	: +·108 ±·042 ,	
1874·3—1876·3	:	+ ·28 ± ·36,
1873·2—1878·3	: —·055 ±·023 ,	
1877·2—1877·3	:	—1·54 ± ·59,
1878·2—1878·3	:	+ ·35 ± ·59,

Erreur moyenne d'un jour jusqu'à 1852: ″·066, °·86; depuis 1853: ″·094, 1°·03, ou, pour toute la série: ″·082, °·95.

C'est la critique que M. O. Struve a faite de ses propres observations qui a fondé sa grande réputation comme observateur d'étoiles doubles. Il y a sans doute d'autres astronomes dont les observations sont moins entachées d'erreurs systématiques; mais la connaissance que nous avons des erreurs systématiques dans les mesures micrométriques, nous la devons en majeure partie aux efforts persévérants de M. Struve pour s'affranchir de ces erreurs, dont il reconnaissait lui-même l'existence dans ses observations. Aussi attendait-on avec impatience la publication de ses observations de Poulkova, et maintenant qu'elles ont paru, nous nous posons cette question: M. Struve a-t-il réussi à obtenir un résultat positif et définitif, et ses observations sont-elles à présent exemptes d'erreurs systématiques?

Les corrections introduites dans le IX^{e} volume des observations de Poulkova sont calculées d'après d'anciennes formules de réduction, et, comme l'auteur le reconnaît lui-même, elles ne peuvent être considérées comme suffisantes pour faire disparaître les erreurs systématiques. Mais M. Struve donne dans son introduction de nouvelles formules de réduction, et ce sont ces formules qu'il s'agit d'examiner. M. Struve a eu l'obligeance de me communiquer les observations de Castor corrigées à l'aide des nouvelles formules, et en outre de mettre à ma disposition celles qu'il a faites de cette étoile pendant les quatre dernières années, ce qui m'a permis d'utiliser le court intervalle qui s'est écoulé entre la publication de ses observations et l'achèvement de ce travail, pour tenir compte dans ma critique de ses corrections les plus récentes.

Il est bien permis de supposer que, par ses mesures d'étoiles doubles artificielles et les corrections qu'il en a déduites, M. Struve a en grande partie réussi à affranchir ses observations de la partie des erreurs systématiques qui dépend de la distance et de la direction mesurées. Or ici, où il ne s'agit que d'examiner les variations des erreurs systématiques avec le temps, toute variation bien constatée

doit être expliquée par une modification du mode d'observation, et non comme une conséquence indirecte des changements de la position relative.

Mais M. Struve s'est aussi, comme on sait, occupé de ce côté de la question, et l'introduction à ses mesures d'étoiles doubles donne sur la variabilité des erreurs systématiques avec le temps (§ 8) des renseignements intéressants. Il en résulte qu'il n'a pas cherché à utiliser ses nombreuses observations d'étoiles doubles douées d'un grand mouvement relatif, pour trouver les époques où les erreurs systématiques ont dû subir des variations. Les recherches qu'il a faites pour déterminer les variations avec le temps n'ont au contraire porté que sur un nombre pas très grand d'étoiles peu observées, et seulement sur des étoiles qu'il suppose ne pas s'être déplacées d'une manière sensible. Il n'a donc pu déduire des observations les époques dont il s'agit. A défaut de critère direct pour les variations des erreurs, il s'est contenté des critères indirects que lui ont fournis les interruptions considérables survenues dans la série de ses observations, et causées soit par d'autres travaux soit par des maladies ou des voyages. Son attention a été ainsi attirée spécialement sur les trois époques 1843·0, 1853·0 et 1865·0, auxquelles il a limité ses recherches. En d'autres termes, M. Struve a pris pour „saisons d'observations“ les quatre périodes suivantes

I	avant	1843·0
II	1843·0—1853·0	
III	1853·0—1865·0	
IV	après	1865·0.

Il a ainsi trouvé que, pour les distances, toutes les observations postérieures à 1853·0 et, pour les directions, toutes celles postérieures à 1843·0, peuvent être considérées comme homogènes, et a déterminé les corrections qui doivent y être faites pour réduire toutes les autres à un système homogène.

La notion de saison d'observation est arbitraire; mais, selon toute probabilité, toute augmentation de la durée de la saison aura pour conséquence de diminuer l'exactitude des résultats. Prenant donc Castor pour premier exemple, je n'ai pas jugé superflu d'examiner si l'on ne pourrait pas diminuer d'une manière sensible l'erreur moyenne des résultats des observations de M. Struve, en indiquant plusieurs époques où ses erreurs systématiques peuvent avoir varié.

Nos formules I et II pour Castor doivent être considérées comme un compromis entre les résultats des différents observateurs, et elles s'écartent notablement des observations de M. Struve, surtout en ce qui concerne les distances. Je ne saurais regarder comme établi que cet écart indique un manque dans mes formules, mais il sera préférable de comparer les observations de M. Struve avec des formules calculées exclusivement d'après ses propres observations, car les critères d'après lesquels elles sont encore affectées de variations des erreurs systématiques, ne sont pas très manifestes et exigent un examen plus approfondi. J'ai donc calculé pour Castor les formules d'interpolation qui suivent en me, servant seulement des observations de Poulkova:

$$r\,10^{\alpha(R-P)} = c\,(t-u) \qquad r\,10^{(P-R)} = c\,(v-t) \qquad ^{1)}$$

ou $\alpha = -\cdot012054$, $P = 237^{\circ}\cdot05$, $c = ''\cdot074565$, $u = 1799\cdot13$ et $v = 1948\cdot00$.

Comparées avec ces formules, les observations de M. Struve donnent les écarts suivants pour les différentes années ou saisons:

---

[1]) Comme je le montrerai à une autre occasion, les formules d'interpolation de cette forme ont des propriétés qui les rendent particulièrement aptes à servir aux calculs des étoiles doubles.

1840	+″·020	±″·025	+ °·49	± °·32
42	—·257	±·047	+ ·69	± ·61
43	+·076	±·047	+1·46	± ·61
44	—·024	±·030	—1·06	± ·38
45	—·050	±·047	—1·20	± ·61
46	—·010	±·047	— ·53	± ·61
47	—·038	±·047	+ ·98	± ·61
48	—·117	±·033	+ ·62	± ·43
49	+·001	±·033	+ ·44	± ·43
50	—·204	±·038	+ ·41	± ·49
51	—·025	±·033	— ·20	± ·43
52	+·008	±·038	— ·51	± ·49
53	+·077	±·054	—1·26	± ·59
54	—.083	±·094	+1·24	±1·03
55	—·039	±·067	+ ·31	± ·73
57	—·033	±·054	+ ·11	± ·59
58	—·093	±·094	+ ·32	±1·03
59	+·004	±·067	—1·25	± ·73
60	+·032	±·054	+ ·47	± ·59
61	+·075	±·067	—1·10	± ·73
62	—·271	±·067	— ·22	± ·73
64	—·077	±·054	+ ·76	± ·59
66	—·079	±·067	+1·40	± ·73
67	—·106	±·067	— ·36	± ·73
68	+·006	±·054	— ·88	± ·59
69	+·030	±·067	—1·55	± ·73
70	+·049	±·067	— ·50	± ·73
71	+·105	±·054	— ·22	± ·59
72	+·139	±·067	— ·21	± ·73
73	+·022	±·054	— ·85	± ·59
74	—·012	±·054	+ ·87	± ·59
75	+·107	±·067	+ ·56	± ·73
76	—·003	±·054	+ ·34	± ·59
77	+·013	±·054	—1·06	± ·59
78	+·078	±·054	+ ·87	± ·59

Entre les 35 lignes qui composent ce tableau, le nombre des changements de signe est un peu moins grand que normalement, à savoir de 14 pour les écarts des distances et de 12 pour ceux des angles de position; mais les écarts des nom-

bres normaux sont trop petits pour qu'on puisse en tirer des conséquences. Par contre, si l'on prend isolément les observations de chacun des 95 jours d'observation, on trouve 41 changements de signe pour les distances et 31 seulement pour les angles de position, ce qui est l'indice d'une trop grande régularité dans la répartition des erreurs relativement au temps, surtout dans les angles de position. On obtient un résultat analogue en comparant, pour chacune des coordonnées, le carré de chaque écart, divisé par le carré de son erreur moyenne correspondante, avec le nombre des observations en excès, qui est seulement de 35 — 3 = 32 pour la distance et de 35 — 2 = 33 pour les angles de position, tandis que la somme des carrés s'élève au chiffre de 120 pour la distance et de 75 pour l'angle de position. Assurément, on pourrait réduire ces nombres (celui de la distance même de $\frac{1}{4}$ environ) par une meilleure détermination des constantes de la formule; toutefois, il ne semble guère possible de les abaisser au-dessous du double des valeurs normales. Comme il est peu probable que la marche systématique de ces déviations repose sur quelque base particulière et réelle, il en résulte que les erreurs systématiques, dans les observations corrigées de M. Struve, doivent encore conserver une variabilité si grande, que le poids de ces dernières pourrait presque être doublé si l'on réussissait à préciser les époques où les variations se sont produites, et ensuite à entreprendre une nouvelle détermination des corrections correspondant à chaque époque. Cette détermination ne peut cependant pas se faire seulement à l'aide des observations de Castor, mais il résulte de celles-ci qu'on doit spécialement porter son attention sur les époques suivantes:

Pour les distances: 1862·0, les années voisines de 1842 et de 1849, 1868·0, 1854·0, 1859·0 et 1863·0

Pour les angles de position: 1844·0, 1854·0, 1867·0, 1847·0, 1859·0, 1873·0, 1851·0 et 1863.

Il y a donc des indices qui font présumer qu'aux trois

époques critiques de M. Struve il faut en ajouter plusieurs autres, et que les valeurs des corrections dont il s'est servi pour réduire les observations antérieures à 1843·0 et celles comprises entre 1843·0 et 1853, ont besoin d'être un peu modifiées.

La marche des déviations, surtout en ce qui concerne les angles de position, fait penser à des perturbations à courte période (8 à 9 ans). En tant qu'on voudrait mettre cette idée en connexion avec la circonstance que Castor est un étoile triple, je ferai tout de suite remarquer que la troisième étoile à faible éclat est à une si grande distance des deux autres, qu'il me paraît absolument impossible qu'elle puisse produire des oscillations telles, que les mouvements relatifs sembleraient cesser quelquefois presque complètement pour redoubler de vitesse 4 ans après. On pourrait plutôt supposer que l'une des deux étoiles à grand éclat soit ellemême une étoile double. Mais l'objectivité de ces variations périodiques ou quasi périodiques trouve si peu d'appui chez d'autres bons observateurs, que je regarde presque comme certain qu'on doit les expliquer comme des résultats de la variabilité des erreurs systématiques.

W. Struve. Observ. astr. inst. in specula U. C. Dorpatensi, vol. 1, pars II pg. 50 (au lieu de 1813, il faut lire 1814 d'après Mensuræ microm. pag. 310). Vol. II, III et IV.; Mensuræ microm.; Additamenta in mens. microm. Jusqu'à 1823, réfracteur de Troughton de 5 pieds; depuis 1826, le grand réfracteur de Dorpat; en 1814 et 1820, avec micromètre de projection; le reste avec micromètre filaire.

1814·8—1823·2 :	....	, $+2^{\circ}\!\cdot\!74 \pm {}^{\circ}\!\cdot\!43$
1823·3 :	$+''\!\cdot\!67 \pm$?	
1826·2—1827·3 :	—·100 ±·032	
1826·2—1831·3 :	....	, + ·32 ± ·20
1828·3—1832·4 :	—·191 ±·026	
1832·4—1838·3 :	....	, — ·65 ± ·25
1833·3—1838·3 :	—·012 ±·030	

Erreur moyenne d'un jour jusqu'en 1823: ?, 1°·79; depuis 1826: ″·095, °·86. Non-seulement les premières mesures de M. Struve montrent de grandes différences systématiques, mais j'ai été surpris de trouver aussi dans son oeuvre classique exécutée avec le grand réfracteur de Dorpat des traces de variations des erreurs systématiques. Pour contrôler ce résultat, j'ai fait une recherche sur les mesures de distances des étoiles doubles d'une distance de 4″ a 5″, qui depuis n'ont pas changé sensiblement de position relative. Il est vrai qu'il y en a parmi elles très peu qui ressemblent en grandeur à Castor; toutefois, je n'y ai trouvé que des traces très faibles de variations des erreurs systématiques, et les époques de changement y diffèrent un peu de celles indiquées par Castor. Cependant il n'y a que peu de ces mesures qui aient été faites avant 1828 ou après 1832.

Talmage. Leyton astr. obs. vol. 2 & 3. Réfracteur de 10 inch. de M. Barcley; micromètre filaire à l'exception de la distance d'un seul jour.

1866·1—1872·2 : —″·091 ±″·061 , +2°·28 ± °·42

Erreur moyenne d'un jour: ″·173, 1°·05. Il y a probablement des erreurs systématiques considérables.

M. Wichmann. Astr. Beob. auf der K. U. Sternwarte in Königsberg. Vol. 24. Héliomètre de Königsberg.

1846·8—1847·2 : +″·348 ±″·019 , +1°·64 ± °·18

Erreur moyenne d'un jour (″·033, °·32). Les distances au moins sont trop grandes, mais il n'y a que 3 observations.

A. Winnecke. Astr. Nachr. vol. 73; réfracteur de Berlin, micromètre filaire.

1855·2—1856·4 : —″·063 ±″·035 , — °·30 ± °·51

Erreur moyenne d'un jour: ″·100, 1°·53. On ne voit pas avec certitude s'il y a des variations des erreurs systématiques.

I. M. Wilson, G. M. Seabroke et plusieurs autres. Mem. of the R. A. S. Vol. **42**. Réfracteur de 8¼ inch. d'Alvan Clark; micromètre filaire.

1872·2—1876·4 : +″·145 ? , °·00 ?

Comme ces observations sont des moyennes non séparables de plusieurs observateurs, il est impossible de faire la distinction entre leurs erreurs accidentelles et systématiques. Quand on ne publie que la moyenne de l'ensemble des observations de plusieurs observateurs en croyant remédier aux erreurs systématiques par ce moyen sommaire, qui n'est justifiable que par rapport aux erreurs accidentelles, on oblige en même temps les calculateurs à se servir pour ces observations d'un procédé non moins sommaire.

OM FLADER AF FJERDE ORDEN

MED

DOBBELTKEGLESNIT.

AF

H. G. ZEUTHEN.

De Flader, hvormed vi her skulle beskjæftige os, ere tidligere undersøgte af Kummer, Clebsch, Geiser, Cremona, R. Sturm[1]) o. fl. Herhen høre ogsaa de Undersøgelser over de saakaldte „Anallagmatiske Flader af fjerde Orden" eller Cyklider ɔ: Flader af fjerde Orden med den uendelig fjerne Kuglecirkel til Dobbeltlinie, som ere begyndte af Moutard[2]) og med stort Held udførte af denne Mathematiker selv samt Laguerre, Darboux[3]) o. fl. Om end de af disse fundne Resultater umiddelbart kun angaa en enkelt Art af de Flader, hvormed vi her skulle beskjæftige os, kan man derfra — for saa vidt Talen ikke er om Realitetsspørgsmaal — uden Arbejde komme til de almindelige ved en simpel homografisk Transformation, som Moutard ogsaa bemærker[4]).

---

[1]) Kummer i Borchardts Journal 64 Bd. S. 66, Clebsch i Borchardt 69 Bd., Geiser i Borchardt 70 Bd., Cremona i Rendiconti del Istituto Lombardo 9. og 23. Marts 1871, Sturm i Mathematische Annalen 4 Bd. S. 265.

[2]) Bulletin de la Société Philomathique 1864, Nouvelles Annales 1864.

[3]) Fortegnelse over den herhen hørende tildels lidet tilgængelige Literatur findes i Darboux' større Værk: Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques. Paris 1873, hvis vigtigste Emne netop er Cykliderne.

[4]) Nouvelles Annales 1864 S. 309. Da Moutard's Afhandlinger i denne Aargang af Nouv. Ann. ere uafhængige af Kummer's Meddelelse til Berliner Akademiet af 16. Juli 1863, har Moutard ogsaa paa sin Side selvstændig fundet de 5 Kummerske Kegler, hvortil Hovedinteressen ved de her betragtede Flader knytter sig.

Hvad jeg fornemmelig har tilsigtet ved her at føje et nyt Arbejde til de anførte, er en Undersøgelse af Form og Sammenhæng af de forskjellige herhen hørende Fladers Net, samt af Realiteten af deres rette Linier og „Kummerske Kegler". Herved opnaar man en Udvidelse af vort meget indskrænkede Kjendskab til saadanne Former i Rummet, som defineres ved simple algebraiske Ligninger, og Exempler, som ville være nyttige ved videre gaaende Undersøgelser af Fladeformer.

Ved denne Undersøgelse har jeg for det første benyttet den Omstændighed, at den tilsyneladende Kontur af Fladen, projiceret fra et Punkt af Dobbeltkeglesnittet, bliver en almindelig Kurve af fjerde Orden. Den herhen hørende Del af Undersøgelsen slutter sig til min tidligere Udledelse af Realitetsegenskaber ved Flader af tredie Orden af deres stereografiske Projektion [1]). Den angivne Fremgangsmaade, som benyttes i tredie Afsnit, er imidlertid kun anvendelig, naar Dobbeltkeglesnittet har reelle Punkter. Denne Indskrænkning er den Fremgangsmaade, som jeg benytter i fjerde Afsnit ikke underkastet. Den bestaar i en Afbildning af Fladen paa de to Sider af en Flade af anden Orden, som atter støtter sig paa en Konstruktion af Fladen, som ret beset kun er en Almindeliggjørelse af en Konstruktion af Cyklider, som findes i Darboux' citerede Værk [2]).

Forud for Studiet af Formerne maa gaa en Udvikling af Fladernes vigtigste almindelige Egenskaber ɔ: Egenskaber, som kunne udtrykkes ved Ligninger, og hvor der altsaa ikke skjelnes mellem reelt og imaginært. Hertil er det naturligt at benytte de samme Midler som ved Studiet af deres Former.

---

[1]) Mathematische Annalen VIII Bd. — Geiser foreslaar i sin allerede citerede Afhandling at anvende den af ham benyttede Transformation, hvorved de her undersøgte Flader sættes i Forbindelse med Flader af tredie Orden, til Udledelse af Realitetsegenskaber. For Fladernes rette Linier er dette heller ikke vanskeligt. Smlgn. Nr. 6.

[2]) Det er dog ikke denne Konstruktion, som ligger til Grund for Darboux' Studium S. 128—131 af Cyklidens Hovedformer, af hvilke man kan udlede Hovedformerne af Flader af fjerde Orden med et Dobbeltkeglesnit, der ikke har reelle Punkter.

Da nu disse Midler, som vise Fladernes Egenskaber i nye Forbindelser og give nye simple Beviser for bekjendte Sætninger, tillige have ført til enkelte nye Sætninger og danne et bekvemt Udgangspunkt for videre gaaende Undersøgelser, vil i første og andet Afsnit Udviklingen heraf blive noget fyldigere, end det blotte Hensyn til Formstudiet i tredie og fjerde Afsnit kræver. —

Da jeg, hvad der forøvrigt er sædvanligt i Geometrien, ved Undersøgelsen af almindelige Egenskaber betragter Beviser som fuldt gyldige, hvor en Figur antages benyttet, paa hvilken visse Punkter og Linier — om hvilke man forud véd, at deres Realitet ikke kræver nogen Betingelsesligning — ere reelle, skal jeg her udtrykkelig opstille det Princip, hvorpaa jeg derved støtter mig. Dette, som nærmest kun præciserer og begrunder Poncelet's Kontinuitetsprincip, trænger i efterstaaende Form ikke selv til nogen Begrundelse:

Naar et saadant Resultat, som kan udtrykkes ved en eller flere Ligninger, er vist at gjælde for uendelig mange Figurer af en vis Art, uden at Koefficienterne i de Ligninger, som definere Figurer af denne Art, tilfredsstille nogen ny særlig Betingelsesligning, maa det gjælde om alle Figurer af den definerede Art.

Da nu f. Ex. den Fordring, at én af de her omhandlede Fladers Dobbeltkeglesnit skal have reelle Punkter, ikke udtrykkes ved en Betingelsesligning, men kun ved en Grænsebetingelse, vil det være fuldkommen tilstrækkeligt at godtgjøre almindelige Egenskaber — men selvfølgelig ikke Realitetsegenskaber — for det Tilfælde, hvor Dobbeltkeglesnittet har reelle Punkter. Dette vilde derimod ikke være Tilfældet, hvis man inden for vor Klasse af Flader betragtede et System, hvor Realiteten af Dobbeltkeglesnittets Punkter krævede en Betingelsesligning.

I. Almindelige Egenskaber udledte ved Projektion fra et Punkt af Dobbeltkeglesnittet.

1. Projektion fra et Punkt af Dobbeltkeglesnittet. Et vilkaarligt plant Snit i en Flade af fjerde Orden med Dobbeltkeglesnit er en Kurve af fjerde Orden med Dobbeltpunkter i Planens Skjæringspunkter med Keglesnittet. Snitkurven er af Klassen 4 . 3 — 2 . 2 = 8. Fra ethvert af Dobbeltpunkterne kan man da drage 4 Tangenter foruden Tangenterne i selve Dobbeltpunktet. Heraf følger, at en omskreven Kegle til Fladen med Toppunkt paa Dobbeltkeglesnittet vil være sammensat af de to Tangentplaner i Toppunktet og en Kegleflade af fjerde Orden, eller at (den tilsyneladende) Kontur af Fladen, naar den projiceres fra et Punkt af Dobbeltkeglesnittet, bortset fra de to Tangentplaners Spor, vil være en Kurve af fjerde Orden. Keglefladen berører enhver af Tangentplanerne langs de i dem indeholdte Hovedtangenter (Tangenter som have Røring af anden Orden med Fladen), hvilket ses ved fra Toppunktet at lægge Tangenter til det af en Tangentplan gjorte Snit i Fladen. Konturen har derfor de to Tangentplaners Spor til Dobbelttangenter. Dobbeltkeglesnittets Plans Spor gaar gjennem disse to Spors Skjæringspunkt.

Af Nr. 2 vil følge, at Konturen kan være en hvilken som helst Kurve af fjerde Orden. At den i Almindelighed hverken har Dobbeltpunkter eller Spidser (eller mere sammensatte Mangefoldspunkter), følger allerede af, at enhver projicerende Linie kun projicerer to Punkter af Fladen, medens et Dobbeltpunkt eller en Spids paa Konturen maatte være Spor af en Dobbelttangent eller Hovedtangent til Fladen[1]) med Røringspunkter uden for Projektionscentret, altsaa af en Linie, der projicerede 4 eller 3 af Fladens Punkter.

2. Analytisk Fremstilling. En Flade af fjerde

---

[1]) Se f. Ex. Salmon: Geometry of three Dimensions, 3 Udg. S. 221 eller Fiedlers anden tyske Udg. af samme Bog, 2. Del S. 24.

Orden med Dobbeltkeglesnit i Planen $z = 0$ fremstilles ved en Ligning af Formen.

$$A_2^2 + 2B_1A_2z + C_2z^2 = (A_2 + B_1z)^2 + (C_2 - B_1^2)z^2 = 0, \quad (1)$$

hvor A_2 B_1 C_2 ere Polynomier i Koordinaterne af de Grader, som Mærketallene angive. Vi tage nu Projektionscentret, der ligger paa Dobbeltkeglesnittet $A_2 + B_1z = 0$, $z = 0$, til Hjørnespids $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ i Koordinatsystemet, Tangentplanen til Fladen $A_2 + B_1z = 0$ i samme Punkt til Plan $y = 0$ og Projektionscentrets Polarlarplan med Hensyn til Fladen $C_2 - B_1^2 = 0$ til fjerde Koordinatplan $t = 0$. Ligning (1) antager da Formen

$$a(\psi + yt)^2 + b(\varphi + t^2)z^2 = 0, \quad (2)$$

hvor φ og ψ ere Funktioner af anden Grad alene af x, y, z, medens a og b ere Konstanter. En projicerende Linie er bestemt ved opgivne Værdier af $\frac{y}{x}$ og $\frac{z}{x}$, som indsatte i (2) give 2 Værdier af $\frac{t}{x}$, som bestemme de projicerede Punkter. Et af disse falder sammen med Projektionscentret, naar

$$ay^2 + bz^2 = 0, \quad (3)$$

som altsaa fremstiller Fladens Tangentplaner i Projektionscentret. De to Værdier af $\frac{t}{x}$ falde sammen, naar

$$a^2y^2\psi^2 = (ay^2 + bz^2)(a\psi^2 + b\varphi z^2),$$

eller naar

$$z^2[(ay^2 + bz^2)\varphi + a\psi^2] = 0.$$

For $z^2 = 0$ falde de projicerede Punkter sammen i et Punkt af Dobbeltkeglesnittet, for

$$(ay^2 + bz^2)\varphi + a\psi^2 = 0 \quad (3)$$

bliver den projicerende Linie derimod en Tangent, og (3) fremstiller altsaa den Kegleflade af 4de Orden, som i Forbindelse med de to Tangentplaner udgjør den hele omskrevne Keglflade.

Ligning (3) er den almindeligste Form[1]) for Ligningen for

[1]) Dette følger af den bekjendte Theori for firdobbelt rørende Keglesnit til en Kurve af fjerde Orden, se f. Ex. Salmon: Higher Plane Cur-

en Kegleflade af fjerde Orden, som har firdobbelt Røring med Planparret $ay^2 + bz^2 = 0$, og hvortil altsaa disse to Planer ere to vilkaarlige Dobbelttangentplaner. Dette Planpars Ligning kan fremdeles antage denne Form, naar $z = 0$ er en vilkaarlig Plan gjennem deres Skjæringslinie, idet blot $y = 0$ da er den harmonisk forbundne Plan. Altsaa:

Naar en vilkaarlig plan Kurve af fjerde Orden, to hvilke som helst af dennes Dobbelttangenter samt en vilkaarlig ret Linie gjennem disses Skjæringspunkt ere forelagte, kan man altid konstruere saadanne Flader af fjerde Orden med Dobbeltkeglesnit, for hvilke Kurven bliver Kontur, idet Fladen projiceres fra et Punkt af Dobbeltkeglesnittet, medens de to Dobbelttangenter blive Spor af Tangentplanerne i Projektionscentret, og Linien gjennem disses Skjæringspunkt Spor af Dobbeltkeglesnittets Plan. Vi se heraf, at man i en almindelig Undersøgelse af Projektionen af den opstillede Klasse Flader fra et vilkaarligt Punkt af Dobbeltkeglesnittet ikke bør tænke sig Konturen eller de tre Planspor underkastede andre Betingelser end angivet i Nr. 1.

3. Synligt og usynligt. For at adskille de to Punkter, som have samme Projektion skjelne vi mellem synligt og usynligt. Vi tænke os da en projicerende Linie gjennemløben fra Projektionscentret til dens Skjæringspunkt med Projektionsplanen, videre til det uendelig fjerne Punkt og dernæst fra det uendelig fjerne Punkt paa den modsatte Side til Projektionscentret. Det Punkt af Fladen, som da først naas, kaldes synligt, det andet usynligt. Hvis man har forbundet to Punkter A og B af Fladen ved en paa Fladen beliggende Linie — hvad der dog ikke er muligt, naar Punkterne ligge paa forskjellige, end ikke ved en fælles Skjæringslinie med den uendelig fjerne Plan forbundne, Net — og naar det antages, at denne ikke i sine Skjæringspunkter med Dobbeltkeglesnittet springer over fra det ene til det andet af de hinanden skjærende Fladestykker,

ves. (I Fiedlers tyske Udgave S. 272 ff.). Af denne Theori gjøre vi flere Anvendelser.

ville A og B begge være synlige eller begge være usynlige, naar Summen af Antallene af Linien AB's Projektions simple Røringspunkter[1]) med Konturen og af dens Skjæringspunkter med Dobbeltkurvens Projektion og med den uendelig fjerne rette Linie er et lige Tal; men det ene af disse Punkter vil være synligt, det andet usynligt, naar den anførte Sum er ulige.

Særlig Interesse frembyder Undersøgelsen af Synlighed eller Usynlighed af to Punkter A og B, som ligge uendelig nær ved Projektionscentret P paa hver sin af de hinanden skjærende Dele af Fladen. Saadanne Punkter fremstilles ved Punkter af Tangentplanernes to Spor, hvis Skjæringspunkt vi ville kalde T'. A's og B's Projektioner kalde vi A' og B'. Vi kunne da tænke os, at et Punkt bevæger sig fra A, holdende sig uendelig nær ved P, hen til Dobbeltkeglesnittets Tangent PT', at det der springer over fra den ene til den anden af de to Fladedele og dernæst, holdende sig uendelig nær ved P, bevæger sig hen til B. Projectionen vil da paa Dobbelttangenten $T'A'$ bevæger sig fra A' til T', dernæst paa Dobbelttangenten $T'B'$ til B'. Da der her til de tidligere Overgangsmaader er kommet et Spring fra det ene Fladestykke til det andet, maa man i den ovenfor givne Regel ombytte Ordene lige og ulige. Bevægelsen kan forøvrigt tænkes udført saaledes, at man ikke paa nogen af de to Veje $A'T'$ og $T'B'$ passerer Projektionsplanens uendelig fjerne rette Linie. Antallet af Skjæringspunkter med Dobbeltkeglesnittets Projektion bliver 0 eller 1, eftersom A' og B' ligge paa samme eller modsat Side af denne. A og B blive da begge synlige eller begge usynlige, naar dette Antal lagt til Antallet af Liniestykkerne $A'T'$s, og $T'B'$s, Røringspunkter med Konturen giver

[1]) Som Røringspunkter betragtes ogsaa Konturens Skjæringspunkter med Dobbeltlinier i Projektionsplanen, ɔ: Linier, hvis Punkter betragtes som Projektioner af to Punkter af en og samme Linie paa Fladen. Dobbeltlinien deles ved et Skjæringspunkt med Konturen (et „Toppunkt") i to Stykker, af hvilke det ene er Projektionen af reelle, i Skjæringspunktet forbundne, Liniestykker, et synligt og et usynligt, medens det andet indeholder Projektioner af imaginære Punkter. — Skjærer Projektionen af AB Konturen i $2n$ sammenfaldende Punkter, tælles disse som n Røringspunkter.

et ulige Tal, det ene synligt, det andet usynligt, naar det giver et lige Tal.

4. Dobbelttangentplaner. Paa de to Spor af Tangentplanerne i Projektionscentret nær, ere Konturens Dobbelttangenter Sporene af de Dobbelttangentplaner til Fladen, som gaa igjennem Projektionscentret P. Disses Antal er altsaa 26. En saadan Plans Skjæringslinie med Fladen har Dobbeltpunkter saavel i de to Røringspunkter som i Planens to Skjæringspunkter med Dobbeltkeglesnittet. Den maa altsaa være sammensat enten af to Keglesnit, der skjære hinanden i de fire Dobbeltpunkter, eller af en Kurve af tredie Orden med Dobbeltpunkt i Projektionscentret og en ret Linie, der skjærer denne Kurve i Planens andet Skjæringspunkt med Dobbeltkeglesnittet og i de to Røringspunkter; den rette Linie vil nemlig ikke kunne gaa igjennem Projektionscentret, uden at Konturen faar et Dobbeltpunkt mod vor Antagelse.

Til hvilken af disse to Slags Dobbelttangentplaner en forelagt Dobbelttangentplan til den omskrevne Kegleflade hører, afgjøres ved at undersøge, om de to Kurver, hvori dens Snit deler sig, hver gaar en Gang gjennem Projektionscentret P, eller om den ene gaar to Gange derigjennem, den anden slet ikke. Ere A' og B' de to Punkter, hvori dens Spor skjære Sporene $T'A'$ og $T'B'$ af Fladens Tangentplaner P, kunne vi følge den af de to Kurver, som gaar igjennem det med P sammenfaldende, i A' projicerede, Punkt A, indtil vi komme til dens i B' projicerede Punkt C. At dette er muligt, følger af, at hver af de her betragtede Kurver kun bestaar af en Gren. Man skal da undersøge, om C falder sammen med det med P sammenfaldende, i B' projicerede, Punkt B. Ligge A' og B' paa samme Side af Dobbeltkeglesnittets Projektion, og er A synligt (usynligt), vil C blive det samme eller det omvendte, eftersom det endelige Stykke $A'B'$ af Dobbeltplanens Spor har et lige eller ulige Antal Røringspunkter med Konturen; omvendt, hvis A' og B' ligge paa hver sin Side af Dobbeltkeglesnittets Projektion. Af disse Bestemmelser sammenholdte med Bestemmelsen i Nr. 3 af, om B var synligt, ses, at C vil falde sammen

med B, naar Omkredsen af $\triangle$ $A'T'B'$ berører Konturen i et ulige Antal Punkter, men ikke, naar den berører Konturen i et lige Antal Punkter. I sidste Tilfælde, der bliver det, hvor Snitkurven er sammensat af to Keglesnit, ligge de 6 Punkter, hvori de tre uendelige Linier $T'A'$, $T'B'$ og $A'B'$ røre Konturen, ifølge Carnot's Theorem paa et Keglesnit, som vil gaa igjennem endnu en Dobbelttangents Røringspunkter. Denne i Forbindelse med $A'B'$ danner et Keglesnit i det samme af de 63 Systemer firdobbelt rørende Keglesnit til Konturen, som indeholder det af $T'A'$ og $T'B'$ sammensatte Keglesnit. Hvert System indeholder i alt 6 Keglesnit sammensatte af rette Linier. For saa vidt nu saavel Tangentplansporene $T'A'$ og $T'B'$ som de 10 andre Dobbelttangenter i samme System ere reelle, kommer man saaledes til efterfølgende Sætning, der da (idet alle Dobbelttangenter til en Fjerdegradskurve uden nogen Betingelsesligning kunne være reelle) ifølge det i Indledningen opstillede Princip dermed vil være almindelig bevist:

Gjennem et Punkt P af Dobbeltkeglesnittet kan man lægge 10 Planer, der skjære Fladen i to Keglesnit; projiceres Fladen fra P, ville disse Planers Spor parvis forbindes til firdobbelt rørende Keglesnit til Fladens Kontur i samme System som det af Sporene af de to Tangentplaner i P sammensatte Keglesnit.

Tillige se vi, at Fladen indeholder 16 rette Linier; enhver Plan gjennem en saadan vil desuden skjære Fladen i en Kurve af tredie Orden med et Dobbeltpunkt.

5. Kummers Theorem. Ifølge Nr. 4 vil der gjennem ethvert Punkt af Dobbeltkeglesnittet kunne lægges 10 Planer, som skjære Fladen i to Keglesnit. Projektionerne af disse Keglesnit fra et fast Punkt P af Dobbelkeglesnittet ville blive firdobbelt rørende Keglesnit til Konturen. Nu deler Systemet af firdobbelt rørende Keglesnit til en Kurve af fjerde Orden sig i 63 indbyrdes adskilte Systemer med Karakteristikerne $\mu = 2$, $\nu = 4$, det vil sige saadanne Systemer, i kvilke der er 2 Keglesnit, som gaa igjennem et vilkaarligt Punkt af Planen,

4, som berøre en vilkaarlig ret Linie. De omtalte Projektioner maa altsaa fordele sig paa et vist Antal y af disse Systemer, og af disse y Systemer dannes ethvert af Projektionerne af et System Keglesnit paa Fladen. Vi ville søge Indhyllingsfladen for et saadant Keglesnitssystems Planer.

I det et vilkaarligt Punkt af Projektionsplanen er Projektion af to Punkter af Fladen, vil der gjennem et vilkaarligt Punkt af Fladen kun gaa ét Keglesnit i Systemet. Dettes Plan vil imidlertid skjære Fladen i endnu et Keglesnit. Hvis nu dette hørte til samme System, vilde man gjennem et Punkt af Fladen kun kunne lægge én Tangentplan til den søgte Indhyllingsflade, og denne vilde altsaa reduceres til en ret Linie, som vilde være Axe for et Bundt Planer, som alle skar Fladen i to Keglesnit. Disse maatte alle skjære Axen i to faste Punkter, idet Axen selv ellers vilde ligge paa Fladen, og Keglesnitssystemets Projektioner maatte da ogsaa gaa gjennem to faste Punkter, hvilket vilde stride mod vor Forudsætning, at Konturen skal være en almindelig Fjerdegradskurve.

Tangentplanerne til vor Indhyllingsflade ville altsaa skjære den givne Flade i endnu en Række Keglesnit, som ikke kan være sammensat af flere Systemer, idet det givne System, og med det Indhyllingsfladen, er usammensat. Gjennem et vilkaarligt Punkt af Fladen gaar altsaa et Keglesnit af hvert af de to Systemer med samme Indhyllingsflade, altsaa to Tangentplaner til denne. Den bliver altsaa af anden Klasse og følgelig tillige en Kegleflade.

Da den fundne Kegleflade ikke vil indeholde Dobbeltkeglesnittet, vil man fra et Punkt P af dette kunne lægge to Tangentplaner til Keglen. Da der nu ifølge Nr. 4 i det hele gaar 10 saadanne Planer gjennem P, maa der være 5 Kegler, og Antallet y af Systemer bliver 10. Altsaa:

Indhyllingsfladen for de Planer, som skjære den forelagte Flade i to Keglesnit, er sammensat af 5 Kegleflader af anden Orden. Disse ville vi efter Theoremets Opdager kalde de Kummerske Kegler. Enhver Tangentplan til en Kummersk Kegle skjærer Fladen i

to Keglesnit, som høre til forskjellige Systemer. De to Systemer Keglesnit paa Fladen, som høre til samme Kummerske Kegle, kaldes konjugerede.

6. Stillingen af de 16 rette Linier mod de Kummerske Kegler. I ethvert af de 10 Systemer, som dannes af Projektionerne af et System Keglesnit paa Fladen, ville to af de 6 af rette Linier sammensatte Keglesnit, fremstille de Keglesnit paa Fladen, som gaa igjennem Projektionscentret P. De Punkter af et af disse, som ligge uendelig nær ved P, fremstilles nemlig ved Sporet af en Tangentplan i P, de øvrige ved Sporet af en Tangentplan fra P til en Kummersk Kegle. De to Par Liniepar, som man kan sammensætte ved at forbinde Sporene af Tangentplanerne i P med Sporene af Tangentplanerne til en Kegle, høre til hver sit af to Systemer firdobbelt rørende Keglesnit, som ere Projektioner af to konjugerede Systemer paa Fladen.

De øvrige 4 Par Dobbelttangenter, som danne Keglesnit i de to Systemer, maa være Projektioner af rette Liniepar paa den givne Flade, som ere beliggende i Tangentplaner til Keglefladen. Da de to Systemer kun have de 4 forud nævnte rette Linier fælles [1]), faa vi paa denne Maade alle Fladens 16 rette Linier med. Altsaa:

Enhver af de 5 Kummerske Kegler berører Fladens 16 rette Linier, som fordele sig 2 og 2 i 8 Tangentplaner til Keglefladen.

Denne Sætning viser, at enhver af Fladens 16 rette Linier skjærer 5 af de andre, nemlig dem, som ligge i samme Tangentplaner til de Kummerske Kegler. Den herved givne Forbindelse mellem Linierne kan, som Darboux og Geiser have gjort opmærksom paa, udtrykkes saaledes:

Fladens 16 rette Linier have i Henseende til indbyrdes Skjæring samme Egenskaber som de 16 rette Linier paa en

---

[1]) Det System, i hvilket disse paa den 3die mulige Maade ere forbundne til Par, er det i Nr. 4 omtalte.

Flade af tredie Orden, som blive tilbage foruden en 17de og dem, der skjære denne.

Denne Forbindelse fremgaar meget naturligt af vor Projektion, som tillige kan være Projektion af en Flade af tredie Orden φ_3 fra et af dens Punkter, saaledes at de to Spor af Tangentplanerne i *P* ombyttes med Sporet af Tangentplanen til φ_3 i det nye Projektionscentrum, og Projektionen af en af denne Flades rette Linier *l*. De 10 Spor af Tangentplanerne fra *P* til de 5 Kummerske Kegler ville da blive Projektioner af de rette Linier paa φ_3, som skjære *l*, medens Projektionerne af de 16 rette Linier paa Fjerdegradsfladen blive de samme som Projektionerne af de Linier paa φ_3, som ikke skjære *l*, og Betingelserne for virkelig Skjæring mellem disse Linier blive, som man let ser, de samme. Vi skulle saa meget mindre dvæle herved, som selve den Transformation, hvorved Geiser beviser Sætningen, viser, at de to Flader maa have samme Projektion, hvilket ligger til Grund for den her angivne Bevisførelse.

7. Skjæringspunkter mellem Fladens Keglesnit Da man gjennem hvert Punkt af Fladen uden for Dobbeltkurven kun kan lægge ét Keglesnit i hvert af de 10 Systemer (Nr. 5), er det klart, at to i samme System ikke kunne skjære hinanden, naar vi vedtage ikke at regne den Skjæring med, som i et Punkt af Dobbeltkurven kan finde Sted mellem Kurver paa forskjellige Fladedele, og som vil ophøre ved en uendelig lille Ændring af den ene Kurve. De to Punkter, hvori et saadant Keglesnit skjærer en anden Tangentplan til samme Kummerske Kegle, maa altsaa høre til Keglesnittet i det konjugerede System:

Keglesnit paa Fladen i samme System skjære ikke hinanden. Keglesnit i konjugerede Systemer skjære hinanden i 2 Punkter.

Skjæringen mellem Keglesnit (*k*) og (*l*), hvis Planer røre forskjellige Kummerske Kegler, kunde undersøges ved en Figur, hvor Konturens 28 Dobbelttangenter, og med disse de 63 firdobbelt rørende Keglesnitssystemer, vare reelle. Man kan

imidlertid simplificere Undersøgelsen ved at nøjes med at betragte det Tilfælde, hvor et af de to Keglesnit (l) er sammensat af to rette Linier a og b. Hvad der gjælder om dette Keglesnit i Henseende til Skjæring, maa gjælde om uendelig mange paafølgende i samme System, da et Skjæringspunkt med (k)'s Plan ikke pludselig kan springe fra (k) over til det andet Keglesnit, hvori samme Plan skjærer Fladen, eller omvendt. Det gjælder saaledes om hele det System, hvortil (l) hører.

Nu maa Linierne a og b, da de skjære hinanden, uden at deres Plan berører samme Kummerske Kegle som (k)'s Plan, udgjøre Dele af Keglesnit i hver sit af de til denne Kegle hørende konjugerede Systemer. Den ene skjærer altsaa (k), den anden ikke. Altsaa:

To Keglesnit paa Fladen, hvis Planer ikke berøre samme Kummerske Kegle, skjære hinanden i ét Punkt.

Er (k') det andet Keglesnit paa Fladen, som ligger i samme Plan som (k), (l') det, som ligger i samme Plan som (l), vil der altsaa i nærværende Tilfælde i Planens Skjæringslinies fire Skjæringspunkter med Fladen være Skjæring mellem (k) og (l), mellem (k) og (l'), mellem (k') og (l), og mellem (k') og (l').

8. Biresultater af Bevisførelsen i Nr. 4—6. Ved at anvende bekjendte Sætninger om Systemer af firdobbelt rørende Keglesnit til en Fjerdegradskurve paa de i de foregaaende Nre. betragtede Systemer finder man Sætninger om vor Flade. Af den Sætning, at Kurvens Røringspunkter med to Keglesnit i samme System selv ligge paa samme Keglesnit, udleder man saaledes:

De to Par Hovedtangenter i et Punkt P af Dobbeltkeglesnittet og Fladens Røringspunkter med de to Dobbelttangentplaner fra P, som røre samme Kummerske Kegle, ligge paa en Kegleflade af anden Orden.

Et Punkt P af Dobbeltkeglesnittet er Toppunkt i en Kegleflade af anden Orden, som gaar gjennem de 8 Punkter, hvori Tangentplanerne fra P til to Kummerske Kegler røre Fladen.

Gjennem Linierne fra et Punkt P af Dobbeltkeglesnittet til Fladens Røringspunkter med Planerne fra dette til to rette Linier paa Fladen, som ligge i samme Tangentplan til en Kummersk Kegle, kan man lægge 3 Keglefladen af anden Orden, som hver gaar gjennem Røringspunkterne mellem Fladen og Planerne fra P til et andet Par rette Linier i en Tangentplan til samme Kummerske Kegle, og to Keglefladen, som hver indeholder Hovedtangenterne i en af Tangentplanerne i P og Røringspunkterne mellem Fladen og en af Tangentplanerne fra P til den nævnte Kummerske Kegle.

Af den Sætning, at de 6 Skjæringspunkter mellem to Dobbelttangenter, som danne Keglesnit i samme System, ligge paa et Keglesnit, udledes blandt andet, at Tangenten i et Punkt P af Dobbeltkeglesnittet og P's Forbindelseslinier med de 5 Kummerske Keglers Toppunkter ere Frembringere i en Keglefade af anden Orden. Ved at betragte Skjæringslinien mellem to saadanne konsekutive Keglefladen ses det, at den Rumkurve af 3die Orden, som gaar igjennem Toppunkterne for de 5 Kummerske Kegler og et Punkt P af Dobbeltkeglesnittet, vil berøre dette i P.

Omvendt kan ogsaa Sætninger om plane Kurver af fjerde Orden udledes af den nærværende stereometriske Anvendelse af disse Kurver. Systemerne af Projektionerne af de to Rækker Keglesnit, som ligge i Tangentplanerne til en Kummersk Kegle, kunne være hvilke som helst to saadanne blandt de 63 Systemer firdobbelt rørende Keglesnit til Kurven, som have 4 Dobbelttangenter, fordelte paa forskjellig Maade til to Par, fælles. Ved den tredie mulige Fordeling skjære Dobbelttangenterne i samme Par hinanden i Projektionen K' af den Kummerske Kegles Toppunkt og i Sporet T' af Dobbeltkeglesnittets Tangent i Projektionscentret. Betragter man nu et Keglesnit i hvert af de to Systemer, ville to af deres Skjæringspunkter være Projektioner af virkelige Skjæringspunkter mellem Keglesnit i Rummet, beliggende i Tangentplaner til den Kummerske Kegle. Deres Forbindelseslinie, som bliver Projektionen af Tangentplanernes Skjæringslinie, maa altsaa gaa gjennem K'.

De samme Keglesnits modstaaende Fælleskorde vil gaa gjennem T', hvilket kan ses ved at lade Dobbeltkeglesnittets Projektion, som kan være en vilkaarlig Linie gjennem T', gaa gjennem et af de to paa denne Fælleskorde liggende Skjæringspunkter M'; de to Tangentplaner ville nemlig da tillige faa det i M' projicerede Punkt af Dobbeltkeglesnittet fælles og falde altsaa sammen (Fælleskorden gjennem K' bliver Projektion af Røringsfrembringeren), og det fjerde Skjæringspunkt mellem de to Keglesnit paa Fladen maa da ogsaa falde i Dobbeltkeglesnittet. Vi have altsaa bevist følgende Sætning:

To modstaaende blandt Fælleskorderne til to firdobbelt rørende Keglesnit til en plan Kurve af fjerde Orden, som henhøre til to saadanne Systemer, som have fire Dobbelttangenter, parrede paa forskjellig Maade, fælles, ville gaa gjennem hver sit af de to Skjæringspunkter mellem saadanne to af de fire Dobbelttangenter, som ikke i noget af de to Systemer ere forbundne til et Keglesnit.

Vi skulle ikke dvæle ved de Anvendelser, man kunde gjøre af denne Sætning paa vor Flade, men heller endnu nævne, at den fører til den forud bekjendte plangeometriske Sætning[1]):

Foruden selve de 28 Dobbelttangenter til en plan Kurve af fjerde Orden existerer der 5040 rette Linier, som hver forbinder 3 Skjæringspunkter mellem Dobbelttangenter; gjennem hvert Skjæringspunkt mellem Dobbelttangenter gaar der 40 af disse rette Linier.

9. **Kurver paa Fladen.** En algebraisk Kurve i Projektionsplanen vil i Almindelighed være Projektion af en usammensat algebraisk Rumkurve, hvis Punkter parvis projiceres i samme Punkt. Ved Undersøgelsen af de simpleste Kurver, som Fladen indeholder, har det imidlertid en særlig Interesse at bemærke de Kurver i Projektionsplanen, for hvilke den proji-

---

[1]) Se Salmon — Fiedler: Höhere ebene Curven, S. 281. Den oven for opstillede almindelige Sætning kan forøvrigt udledes analytisk, ganske som den mere specielle om Dobbelttangentpar bevises hos Salmon.

cerede Kurve spalter sig i to, hvis Projektioner falde sammen. En nødvendig Betingelse herfor er, at den fælles Projektion berører Konturen i alle de (reelle eller imaginære) Punkter, som de have fælles (Nr. 3). Denne Betingelse vil ogsaa være tilstrækkelig, naar Projektionen er unikursal (af Slægten 0), hvilket viser sig derved, at den projicerede Kurves Slægt da bliver — 1[1]).

Jeg formaar ikke at angive den tilstrækkelige Betingelse for Opløseligheden i fuldstændig almindelig Form[2]), medens den ikke vil være vanskelig at finde i de enkelte Tilfælde, hvor Talen er om Kurver af lavere Grader. Da Bestemmelsen af saadanne Kurver paa vor Flade imidlertid ad helt anden Vej er gjennemført meget fuldstændigt i den i Indledningen anførte Afhandling af Clebsch, og da vi senere hen (Nr. 14) skulle angive et nyt, meget bekvemt Hjælpemiddel til saadanne Undersøgelser, skulle vi her nøjes med at vise Brugbarheden af nærværende Fremgangsmaade ved at benytte den til at finde de paa Fladen beliggende Rumkurver af tredie Orden.

En saadan Kurve maa, som enhver Kurve paa Fladen, skjære Dobbeltkeglesnittet. Vi ville tage et af Skjæringspunkterne P til Projektionscentrum. Kurven vil da projiceres i et Keglesnit, der har firdobbelt Røring med Konturen.

---

[1]) Dette Resultat, som forøvrigt er indbefattet i en almindeligere Formel, som jeg har angivet i 3. Bd. af Mathematische Annalen S. 323, faas ogsaa ved Tælling af Dobbeltpunkter.

[2]) Af mere specielle Resultater skal jeg anføre følgende: Skal en Kurve af 3die Orden uden Dobbeltpunkter i Projektionsplanen være Projektion af to Kurver, maa den høre til et af de 28 (3-dobbelt uendelige) Systemer af 6-dobbelt rørende Trediegradskurver til Konturen, hvis Røringspunkter ligge paa Keglesnit gjennem en Dobbelttangents Røringspunkter med Konturen; en Fjerdegradskurve uden Dobbeltpunkter maa høre til det (6-dobbelt uendelige) System 8-dobbelt rørende Kurver, hvis Røringspunkter ligge paa et Keglesnit, og en Kurve af højere Orden uden Dobbeltpunkter kan slet ikke være Projektion af to forskjellige Kurver. — De omtalte Systemer af 6- eller 8-dobbelt rørende Kurver af 3die eller 4de Orden til en Kurve af 4de Orden ere ikke de eneste existerende. (Se Steiner og Hesse i Crelle 49. Bd. og Clebsch i Crelle (Borchardt) 63. Bd. S. 212).

Nu vil ethvert firdobbelt rørende Keglesnit, da det er af Slægten Nul, være Projektion af to Kurver, som ligeledes ere af Slægten Nul (idet den samlede Slægt af den projicerede Kurve bliver — 1), og som altsaa hver kun bestaar af en Gren. Vi behøve altsaa, som vi gjorde det for de i Dobbelttangenterne projicerede Kurver, kun at undersøge, hvor mange Gange hver af Kurverne gaar gjennem P; 2 lagt til det fundne Tal giver Kurvernes Ordener. For Øjeblikket gjælder det altsaa om at finde saadanne Keglesnit, hvis 4 Skjæringspunkter med Sporene af de to Tangentplaner i P ere Projektioner af 3 med P sammenfaldende Punkter af den ene Del af den projicerede Kurve, og 1 af den anden.

Naar man betragter de 63 forskjellige Keglesnitssystemer, viser dette sig kun at være Tilfældet med de 32 Systemer, som bestemmes ved et dertil hørende Keglesnit sammensat af Sporet af en Tangentplan i P og Projektionen af en af de 16 rette Linier l, og hvis øvrige 5 Keglesnit med Dobbeltpunkt ere sammensatte af Sporet af en Tangentplan fra P til en Kummersk Kegle og Projektionen af den Linie paa Fladen, der ligger i samme Tangentplan til den Kummerske Kegle som l[1]). Gjennem P gaar der altsaa 32 Systemer af Rumkurver af tredie Orden, og en vilkaarlig Kurve i et saadant er bestemt ved endnu et Punkt Q af Fladen (smlgn. Nr. 5). Disse Systemer ere imidlertid parvis forbundne saaledes, at man gaar over fra det ene til det andet ved Ombytning af de to Tangentplaner i P. Lader man nu P bevæge sig paa Dobbeltkeglesnittet, vil man (se næste Nr.) træffe paa Punkter, hvor de to Tangentplaner falde sammen, idet Fladestykkerne ere forbundne. Det

---

[1]) Man ser strax, at Planerne fra P til et saadant Liniepar skjære Fladen i en Kurve af tredie Orden, sammensat af en ret Linie og et Keglesnit, og en Kurve af femte Orden, sammensat af en Kurve af tredie Orden og et Keglesnit. — At de andre 31 Keglesnitssystemer — blandt hvilke vi forøvrigt have betragtet de 10, hvor den projicerede Kurve er sammensat af et Keglesnit og en Kurve af sjette Orden, i Nr. 5 — her ere ubrugelige, ses ogsaa lettest ved Betragtning af deres sammensatte Keglesnit.

ene af de to Systemer gaar altsaa over til det andet. Derimod ere de 16 Systemer, som derved dannes af de 32, adskilte, idet hvert paa en særlig Maade er knyttet til en af de rette Linier. I det Q og et Punkt, uendelig nær ved P paa et af Fladestykkerne gjennem P, bestemmer en Kurve i et System, ses det, at:

Fladen indeholder 16 Systemer Rumkurver af tredie Orden. I et saadant bestemmes en Kurve ved 2 af sine Punkter. Ethvert af Systemerne indeholder en uendelig Række plane Kurver af tredie Orden med Dobbeltpunkt.

Vor Fremstilling af disse Kurver er ogsaa vel skikket til Bestemmelsen af Antallene af deres Skjæringspunkter med Fladens forskjellige rette Linier. Den har det forud for Clebsch's Udledelse af samme Resultater, at de ensartede 16 Systemer alle bestemmes paa ensartet Maade.

At der ikke foruden disse Rumkurver af tredie Orden tillige er andre, som gaa gjennem faste Punkter af Dobbeltkeglesnittet, faas ved enten at prøve at lægge P i alle mulige Punkter af dette, for hvilke Konturen faar en særlig Form, eller ved for en vilkaarlig Beliggenhed af P tillige at undersøge de Kurver, hvis Projektioner ere Trediegradskurver med Dobbeltpunkt.

10. Tilbagegangspunkter. Den omskrevne Kegleflade med Toppunkt P paa Dobbeltkeglesnittet skjæres af dettes Plan i 4 Frembringere, hvis Røringspunkter maa falde sammen med de Punkter, hvori de træffe Dobbeltkeglesnittet foruden i P. I dette andet Skjæringspunkt med Dobbeltkeglesnittet bliver saaledes de sammenfaldende Skjæringspunkter konsekutive Punkter paa Fladen. Punktet maa altsaa være et saadant, hvor de to Fladestykker, som skjære hinanden langs Dobbeltkurven, forbindes, hvor saaledes — naar selve Dobbeltkurven er reel — de to Tangentplaner falde sammen for dernæst at blive imaginære, saa Dobbeltkurven gaar over fra at være Skjæringskurve mellem to reelle Dele af Fladen til at blive en isoleret Kurve. Disse Punkter, som Clebsch kalder Tilbagegangspunkter

ere de samme, som Cayley har kaldt „Pinchpoints". Af disse har vor Flade altsaa 4[1]).

Naar Fladen projiceres fra et Tilbagegangspunkt, faar Konturen et Dobbeltpunkt i Sporet af den særegne Tangent. De to Spor af Fladens Tangentplaner falde sammen i en af de 6 Tangenter, som udgaa fra Dobbeltpunktet. Hver af de 5 andre bliver Spor af en Plan, hvori to Dobbelttangentplaner ere faldne sammen. Dobbelttangentpar til en Kurve af fjerde Orden, som falde sammen, naar den faar et Dobbeltpunkt, danne Keglesnit i samme System. Det bliver altsaa ifølge Nr. 4 Tangentplanerne til samme Kummerske Kegle, som falde sammen.

Vi se saaledes, at de 5 Kummerske Kegler alle gaa gjennem de 4 Tilbagegangspunkter. De Tangentplaner til Keglerne, som gaa igjennem disse Punkter, ville skjære Fladen i to Keglesnit, som berøre hinanden. (Følger af Beviset til Nr. 5 eller af den foregaaende Note).

11. Andre Beviser for Kummers Theorem. At de sammenfaldende Dobbelttangentplaner gjennem et Tilbagegangspunkt maa skjære Fladen i to Keglesnit, vil ogsaa følge af, at Fladens rette Linier[2]) ifølge Nr. 2 i Almindelighed ikke gaa

---

[1]) I min Afhandling om reciproke Flader i 10de Bd. af Mathematische Annalen har jeg S. 468—479 udførlig studeret disse Punkters Egenskaber. Af disse skal jeg her kun anføre følgende, hvis Udledelse, navnlig naar man holder sig til den foreliggende Flade, er let: et vilkaarligt plant Snit gjennem et Tilbagegangspunkt har en Spids i samme; der existerer et Bundt Planer gjennem Punktet, hvor denne Spids gaar over til et Berøringspunkt mellem to Grene; Planerne i dette Bundt berøre alle Fladen i Tilbagegangspunktet, hvorfor enhver omskreven Kegleflade gaar gjennem dette Punkt; den omskrevne Kegleflade med Toppunkt i et Tilbagegangspunkt har det nævnte Bundts Axe, den saakaldte særegne Tangent, til Dobbeltfrembringer. Dette sidste ses ved at trække Tangenter fra vort særegne Punkt til de forskjellige plane Snit gjennem samme, men vil forøvrigt frembyde sig som den eneste mulige Forklaring af, at Tangentplanerne til Fladens to Net, som vare Dobbelttangentplaner til den omskrevne Kegleflade med Toppunkt i et vilkaarligt Punkt af Dobbeltkurven, falde sammen.

[2]) Foruden Nr. 1, 2 og 10 benyttes her kun Begyndelsen af Nr. 4, som viser, at der højst er 26 rette Linier.

igjennem noget Tilbagegangspunkt. Man kan saaledes ved Hjælp af Nr. 10 finde, at Indhyllingsfladen for Planer, der skjære Fladen i to Keglesnit, (mindst) er af 10de Klasse, og at den gaar 5 Gange gjennem hvert Tilbagegangspunkt. Den kan ikke skjære Dobbeltkeglesnittet i andre Punkter — hvad man vilde se ved at forsøge at tage et saadant andet Skjæringspunkt, hvis det existerede, til Projektionscentrum — og maa altsaa være af 10de Orden. Skjæringskurven med Dobbeltkeglesnittets Plan bliver altsaa en Kurve af 10de Orden med 4 femdobbelte Punkter. En saadan maa være sammensat af fem Keglesnit, da den faar 21 Punkter fælles med Keglesnit gjennem de femdobbelte Punkter og et enkelt Punkt af Kurven.

At Indhyllingsfladen er sammensat af Keglefiader, ses dernæst ved, at dens Tilbagegangskant, hvis den existerede, maatte skjære Dobbeltkeglesnittets Plan i Spidser paa den fundne Skjæringskurve. Saadanne existere nu ikke umiddelbart, og de femdobbelte Punkter kunne heller ikke være dannede ved Sammenfalden af særegne Punkter, hvoriblandt Spidser, da de fremkomme ved Planens Skjæring med 5 forskjellige Net af den udfoldelige Flade[1]).

At den her omtalte Indhyllingsflade er sammensat af Keglefiader, ses endnu mere umiddelbart, naar man søger dens (mulige) Tilbagegangskurves Skjæringspunkter med selve den givne Flade. Et saadant maatte nødvendigvis være et af de to Punkter, hvor den tilhørende Tangentplan til Indhyllingsfladen berørte den givne Flade, da Planen ellers maatte berøre den givne Flade langs en ret Linie, og altsaa 2 af Fladens rette Linier maatte falde sammen. Var imidlertid et af en Dobbelttangentplans Røringspunkter beliggende paa Indhyllingsfladens Tilbagegangskurve, maatte det ogsaa ligge paa den konsekutive Frembringer af denne Flade, hvoraf vilde følge, at Planen

[1]) Dette Bevis afviger ikke væsentligt fra det, som jeg har ført i min citerede Afhandling om reciproke Flader S. 540, hvor jeg ogsaa alene støttede mig paa Bestemmelser af Antal af Særegenheder. Kun anvendte jeg den Gang de almindelige Relationer mellem saadanne Antal.

maatte have stationær Røring i sit andet Røringspunkt, som saaledes maatte være en Spids paa Skjæringskurven. Saadanne findes nu ikke paa en Kurve sammensat af to Keglesnit. Tilbagegangskurven faar altsaa Ordenen 0.

Har man først paa denne Maade set, at Indhyllingsfladen er sammensat af Kegler, vil det følge af Nr. 2, at ingen af disse kan være af højere end anden Orden, da ellers mere end 2 Dobbelttangenter til den forelagte Flades Kontur maatte gaa gjennem samme Punkt.

II. Almindelige Egenskaber udledte ved Benyttelse af en Kummersk Kegle.

12. Projektion af Fladen fra Toppunktet af en af de Kummerske Kegler. Idet enhver Frembringer i en Kummersk Kegle berører Fladen to Gange, bliver Antallet af Tangenter, som man foruden to Dobbelttangenter kan lægge fra Keglens Toppunkt T til Fladens Skjæringslinie med en Plan gjennem T, 4, da Snitkurven har 2 Dobbeltpunkter og altsaa er af 8de Klasse. Projiceres altsaa Fladen fra T, vil Konturen være sammensat af den Kummerske Kegles Spor (s_2) taget to Gange og en Kurve af fjerde Orden (k_4). Et Punkt af Projektionsplanen er her Projektion af 4 Punkter af Fladen.

Klassen af (k_4) findes ved at søge Antallet af de Tangenter, som den har fælles med (s_2). Disse to Kurver maa for det første berøre hinanden i de Punkter, de have fælles. Den projicerende Plan til en Tangent til (s_2) i et Punkt Q skjærer nemlig Fladen i to Keglesnit med to Skjæringspunkter paa Linien TQ, nemlig Dobbelttangentplanens Røringspunkter, og de fire Tangenter fra T til Keglesnittene blive Frembringere i Keglen $T(k_4)$. Falder nu en af disse sammen med TQ, maa de to Keglesnit begge berøre denne, og altsaa endnu en Frembringen i $T(k_4)$ falde sammen med TQ. (k_4) og (s_2) berøre altsaa hinanden i 4 Punkter; Tangenterne i disse tælle som $2 \,.\, 4 = 8$ Fællestangenter. De andre Fællestangenter maa være Sporene af Planer, der skjære Fladen i to Keglesnit, hvoraf det ene

er sammensat af to rette Linier. Af saadanne Planer gaar der 8 igjennem T, saaledes at fire af de sammensatte Keglesnit høre til det ene, fire til det andet af de to i Tangentplanerne til den Kummerske Kegle beliggende Systemer af Keglesnit. (k_4) har altsaa i det hele 16 Fællestangenter med Keglesnittet (s_2) og maa følgelig være af 8de Klasse.

En Kurve af fjerde Orden og 8de Klasse har to Dobbeltpunkter. Foruden Frembringerne i den Kummerske Kegle $T(s_2)$ kan man altsaa gjennem T lægge to Dobbelttangenter til Fladen.

(k_4) faar 8 Dobbelttangenter. Disse vilde være Sporene af Tangentplanerne fra T til de 4 andre Kummerske Kegler, og danne saaledes 4 sammensatte firdobbelt rørende Keglesnit til (k_4). Foruden disse og (s_2) har man et firdobbelt rørende Keglesnit i Dobbeltkeglesnittets Projektion; thi naar Dobbeltkeglesnittet har et Punkt R fælles med Keglefladen $T(k_4)$, vil den ene af de to Tangentplaner til Fladen i R røre $T(k_4)$ langs TR (se Nr. 13). Det kan have Interesse at vide, hvorledes de her nævnte 6 firdobbelt rørende Keglesnit til (k_4) fordele sig paa de forskjellige Systemer af saadanne.

En Kurve af fjerde Orden med to Dobbeltpunkter har ialt 13 Systemer 4-dobbelt rørende Keglesnit. Af disse have de 12 Karakteristikerne $\mu = 2$, $\nu = 4$ og indeholder hvert to Par Dobbelttangenter og to Keglesnit sammensatte af to Tangenter fra et Dobbeltpunkt (hvert af disse sidste tælles dobbelt i Karakteristikformlerne). Det 13de indeholder fire Par Dobbelttangenter og et uendelig fladtrykt Keglesnit med Toppunkter i Dobbeltpunkterne. Dets Karakteristiker blive $\mu = 2$, $\nu = 3$.

Af den tidligere Bestemmelse af de forskjellige Systemer Keglesnit paa Fladen vil det nu fremgaa, at en Kummersk Kegle ikke staar i nogen anden Forbindelse med en enkelt af de andre end dem, hvori den staar med dem alle (som saaledes, naar den enes Toppunkt er bekjendt, ville bestemmes ved en irreduktibel Ligning). Dette kan ikke forenes med andre Forudsætninger end den, at alle de nævnte 6 firdobbelt rørende Keglesnit høre til det sidst nævnte af de 13 Systemer, hvilket

ogsaa i Nr. 13 og 15 vil vise sig paa anden Maade. Dette kunde give Anledning til Opstilling af forskjellige Sætninger af samme Art som dem i Nr. 8. Ved disse skulle vi dog ikke dvæle men blot sammenfatte det her beviste i følgende Sætninger:

Konturen af Fladen, projiceret fra et Toppunkt i en Kummersk Kegle, er sammensat af denne Kegles Spor (s_2) taget dobbelt, og en Kurve af fjerde Orden (k_4) med to Dobbeltpunkter, som berører saa vel det førstnævnte Keglespor som Dobbeltkeglesnittets Projektion (d_2) firdobbelt. Disse to Keglesnit, saa vel som Sporene af Tangentplanparrerne til de øvrige 4 Kummerske Kegler, ville høre til det særegne System af firdobbelt rørende Keglesnit, hvis Røringspunkter ligge paa Keglesnit med (k_4)'s to Dobbeltpunkter. I hver af de 8 Fællestangenter til (s_2) og (k_4) projiceres to af Fladens rette Linier.

13. Konstruktion af Fladen. I nøje Forbindelse med den i Nr. 12 angivne Projektion af Fladen staar en Konstruktion af dens Punkter, som giver et særlig godt Overblik over mange af dens Egenskaber. Gjennem en vilkaarlig ret Linie gjennem Toppunktet T i en Kummersk Kegle kan man lægge 2 Tangentplaner til denne, hvoraf hver vil skjære Fladen i 2 Keglesnit, et af hvert af de 2 til Keglen hørende konjugerede Systemer. Den rette Linies 4 Skjæringspunkter med Fladen dele sig da i 2 Par: M_1, M_2 og M_1', M_2', hvoraf hvert (ifølge Nr. 7) dannes af Skjæringspunkterne mellem Keglesnit i forskjellige Systemer. Kalde vi nu det Punkt, der er harmonisk forbundet med T med Hensyn til M_1M_2, S og det, som er harmonisk forbundet med T med Hensyn til $M_1'M_2'$, S', bliver det geometriske Sted for Punkterne S og S' en Flade (σ_2) af anden Orden. Det geometriske Sted indeholder nemlig ikke andre Punkter af en Linie gjennem T end de denne Linie tilhørende Punkter S og S', samt dem, der muligvis, som hørende til andre Linier gjennem T, kunde falde i T. Saadanne findes imidlertid ikke; thi hvis S faldt sammen med

T, maatte M_1 eller M_2 det ogsaa, T altsaa ligge paa den givne Flade, hvilket ikke er Tilfældet.

Da S og S' falde sammen, naar Punktparret M_1 og M_2 falder sammen med Punktparret M_1' og M_2', maa den Kummerske Kegle være den om Fladen (σ_2) omskrevne Kegle med Toppunktet T.

Vi kunne nu ogsaa søge det geometriske Sted for de Punkter DD', som ere harmonisk forbundne baade med Hensyn til M_1M_2 og til $M_1'M_2'$. Paa hver Linie gjennem T faas 2 saadanne Punkter foruden dem, der maatte falde i T. Skal nu, for en Linie gjennem T, D falde sammen med T, maa D' falde sammen baade med S og S'. Vi have imidlertid set, at disse kun falde sammen, naar M_1M_2 falder sammen med $M_1'M_2'$. I dette Tilfælde kan imidlertid ethvert andet Punkt af Linien lige saa godt som T være et Punkt D, og Linien maa altsaa helt falde paa det geometriske Sted. Dette er altsaa sammensat af den Kummerske Kegle og en Flade (δ_2) af anden Orden[1]), som bliver det egentlige geometriske Sted.

Kjender man Fladerne (δ_2) og (σ_2), faar man for enhver Linie gjennem T bestemt S, S', D, D' ved Skjæring med disse, og Skjæringspunkterne M_1M_2, $M_1'M_2'$ bestemmes da som Dobbeltpunkter i de Involutioner, der bestemmes ved Punktparrene DD' og henholdsvis TS eller TS'.

Skal M_1 falde sammen med M_1' (eller M_2'), uden at de 2 andre Punkter M falde sammen, maa D og D' falde sammen i samme Punkt. Dobbeltkeglesnittet er altsaa Røringslinien for den omskrevne Kegle til (δ_2) med Toppunkt T.

Skulle 2 Punkter i samme Par M_1 og M_2 falde sammen,

---

[1]) Et fuldstændigt Bevis vilde dog kræve, at man søgte, om ikke, naar Linien gjennem T nærmer sig til at blive Frembringer i den Kummerske Kegle, D eller D' har T til Grænsestilling. Vi spare os denne Undersøgelse, idet man let analytisk beviser, at Skjæringslinien mellem Fladen (δ) og en vilkaarlig Plan gjennem T bliver et Keglesnit. Dette er forøvrigt bevist af Dr. J. Petersen i Tidsskrift for Mathematik 1874, hvor han angiver en af ham og mig funden Konstruktion af Kurver af 4de Orden med 2 Dobbeltpunkter, som er ganske den samme, som her benyttes for Flader af 4de Orden med Dobbeltkeglesnit.

maa saavel S som D falde i samme Punkt. Røringslinien mellem den givne Flade og den omskrevne Kegle $T(k_4)$ bliver altsaa Skjæringslinien mellem de to Flader (σ_2) og (ϑ_2). Kurven (k_4) (se Nr. 12) bliver da Projektionen af denne Rumkurve (r_4); Keglesnittene i det særegne System af firdobbelt rørende Keglesnit blive Konturer af de Flader af anden Orden, som gaa gjennem denne, og (k_4)'s Dobbeltpunkter Sporene af Frembringerne gjennem T i den Flade i Bundtet, som gaar gjennem T.

Fladen (σ_2) kunde defineres som geometrisk Sted for Polarerne til T med Hensyn til Keglesnittene i Tangentplanerne til den Kummerske Kegle.

Hvis man nu omvendt tager to vilkaarlige Flader (σ_2) og (ϑ_2) af anden Orden og et Punkt T og udfører den her angivne Konstruktion, finder man ved Tælling af Skjæringspunkter med Linier gjennem T, at den er af fjerde Orden. Ifølge Konstruktionen staar den i den her angivne Forbindelse med T, (σ_2) og (ϑ_2). Idet vi da stille denne omvendte Sætning først, have vi:

Naar man har givet et Punkt T og to Flader af anden Orden (σ_2) og (ϑ_2), og en bevægelig ret Linie gjennem T skjærer disse henholdsvis i SS' og i DD', og man bestemmer 2 Punktpar M_1M_2 og $M_1'M_2'$, som begge ere harmonisk forbundne med Hensyn til DD', det første tillige med Hensyn til TS, det sidste til TS', er det geometriske Sted for disse Punkter M en Flade af fjerde Orden med Dobbeltkeglesnit i (ϑ_2)'s Røringslinie med den omskrevne Kegleflade fra T, med den omskrevne Kegleflade fra T til (σ_2) til Kummersk Kegle, og som har simpel Røring langs Skjæringslinien (r_4) mellem (σ_2) og (ϑ_2) med den Kegleflade, som projicerer denne Skjæringslinie fra Punktet T.

Omvendt kan enhver Flade af fjerde Orden med Dobbeltkeglesnit frembringes som her be-

skreven paa 5 Maader[1]) (nemlig en for hver Kummersk Kegle.

14. Fladens Fremstilling paa en dobbelt Flade af anden Orden (σ_2), med Anvendelser. Den foregaaende Konstruktion giver Anledning til en temmelig overskuelig ny Fremstilling af Fladen. Hvert Punkt S af Fladen (σ_2) svarer til 2 Punkter M_1 og M_2 af den forelagte Flade, som da kunne siges at afbildes i S. Afbildningen sker ved Projektion fra T, dog saaledes, at af de 4 Punkter M, som projiceres i Punkterne S og S' af (σ_2), de to afbildes i S og de to i S'. Idet de to Punkter M_1 og M_2, som afbildes i S, skille S og T, kan man tænke sig hvert af dem afbildet i S paa den Side af Fladen (σ_2), hvor det Stykke af den uendelige Linie ST, som indeholder det, ligger for S. Afbildningerne paa de to Sider af (σ_2) forbindes med hinanden langs Rumkurven (r_4), der da skiller saadanne Dele af (σ_2), hvor der afbildes reelle og imaginære Punkter, og følgelig bliver Afbildningens Kontur. De to Afbildninger ville derimod vexle Side, altsaa skjære hinanden, naar man paa (σ_2) passerer Røringskurven med den Kummerske Kegle $T(s_2)$; denne Røringskurve spiller altsaa samme Rolle som Dobbeltkurvens Projektion ved Fladens tidligere Fremstilling paa en Dobbeltplan. Da selve Fladens Dobbeltkeglesnit nu dannes ved Skjæring af saadanne Dele, som ikke have samme Afbildning (men afbildes i S og S'), spiller det ingen Rolle ved nærværende Afbildning.

Ved stereografisk Projektion af (σ_2) kunde man faa en ny Afbildning paa en Dobbeltplan; men da denne indeholder „Fundamentalpunkter", er dens Forbindelse med Fladen neppe saa overskuelig. — Projektion fra T af Afbildningen paa (σ_2) falder sammen med den i Nr. 12 angivne Projektion af Fladen.

---

[1]) Hvis (δ_2) er en Kugle med Centrum i T, bliver Dobbeltkeglesnittet den uendelig fjerne Kuglecirkel, Fladen altsaa en Cyklide med (δ_2) til Ledekugle. (σ_2) bliver den reciproke Polarflade med Hensyn til denne Kugle til den tilhørende „surface déférente". Vor Konstruktion vil saaledes gaa over til den Konstruktion af Cykliden, som findes angivet S. 122 af Darboux: Sur une classe remarquable etc.

Nærværende Afbildning giver vist nok det bekvemmeste Middel til Studiet af Fladens Kurver. En Kurve af n'te Orden paa (σ_2) er Afbildning af en saadan Kurve af Ordenen $2n$ paa den undersøgte Flade, som har uendelig mange Dobbeltsekanter gjennem T, dannende en Kegleflade af n'te Orden. Man har tillige her den Fordel at kunne bestemme saadanne Flader, som skjære den givne Flade i denne Kurve. Disse ville nemlig dannes, naar man lader Punktet S bevæge sig paa de Flader, der skjære (σ_2) i Billedkurven, i Stedet for paa (σ_2) og for Resten anvender samme Konstruktion som i Nr. 13.

En saadan Kurve af Ordenen $2n$, kan nu være sammensat af 2 Kurver af Ordenen n, der ikke have uendelig mange Dobbeltsekanter gjennem T. Den Kurve paa (σ_2), som afbilder disse to Kurver, maa nødvendigvis røre Kurven (r_4) i alle de Punkter, de have fælles.

Vi skulle nøjes med at undersøge Tilfældene $n = 1$ og $n = 2$.

$n = 1$. En retliniet Frembringer af (σ_2) er Afbildning af et Keglesnit paa Fladen, som maa være beliggende i en Tangentplan fra T til (σ_2), altsaa i en Tangentplan til den Kummerske Kegle. Det andet Keglesnit i samme Plan svarer til Frembringeren af anden Frembringelse i denne Tangentplan. Til de to Frembringerrækker svare da de to konjugerede Keglesnitssystemer. Hver Frembringerrække indeholder 4 Frembringere, som berøre Fladen (ϑ_2) og altsaa Rumkurven (r_4). Det ved en saadan fremstillede Keglesnit faar et Dobbeltpunkt i Røringspunktet og maa altsaa være sammensat af 2 rette Linier. Saaledes faas Fladens 16 rette Linier.

$n = 2$. Til et plant Snit i (σ_2) vil svare en Rumkurve af fjerde Orden. Denne vil dels ligge paa den Kegleflade af anden Orden, som projicerer Keglesnittet fra T, dels paa en Flade af anden Orden, som bestemmes ved at lade det i Konstruktionen benyttede Punkt S bevæge sig paa Snitplanen. Rumkurven er altsaa af første Art (ɔ: Skjæringskurve mellem Flader af anden Orden). Da Rummet indeholder en tredobbelt Uendelighed af Planer, og da den Kegleflade, som projicerer et Keglesnit paa (σ_2), skjærer (σ_2) i endnu et Keglesnit, se vi saa-

ledes, at **Fladen indeholder en tredobbelt Uendelighed**[1]) **af saadanne Rumkurver af fjerde Orden og første Art, som to og to ere beliggende paa Keglefl ader af anden Orden med samme Toppunkt** T **som en Kummersk Kegle.** I den Kummerske Kegles Røringslinie falde to saadanne Rumkurver sammen.

15. **Nye Egenskaber ved de Kummerske Kegler.** En Rumkurve af fjerde Orden første Art deler sig i to plane Keglesnit, naar den faar to Dobbeltpunkter; dens Projektioner faa nemlig da 4. Dette vil være Tilfældet med de i Nr. 14 fundne Rumkurver, naar de Keglesnit, der afbilde dem paa (σ_2), berøre (r_4) i 2 Punkter. Nu vides det, at Dobbelttangentplanerne til Skjæringskurven (r_4) mellem to Flader af anden Orden ere Tangentplanerne til 4 Keglefl ader af anden Orden, som gaa gjennem samme Rumkurve. De to Keglesnit paa den undersøgte Flade, som afbildes i Skjæringslinien mellem (σ_2) og en bevægelig Tangentplan til en af disse Keglefl ader $(\varkappa_2)$, skjære hinanden i dennes to Røringspunkter med (r_4), og høre altsaa ifølge Nr. 7 til konjugerede Systemer. De to Punkters Forbindelseslinie gaar stedse gjennem Keglen $(\varkappa_2)$'s Toppunkt, som altsaa maa være Toppunkt i den Kummerske Kegle, som berører de to fundne Keglesnits Planer. Disse to Planer falde sammen i den tilsvarende Tangentplan til $(\varkappa_2)$, naar denne Tangentplan gaar gjennem T, og denne Plan vil saaledes berøre den Kummerske Kegle lige saa vel som $(\varkappa_2)$ langs Forbindelseslinien mellem dens Røringspunkter med Rumkurven (r_4). Altsaa:

Den Rumkurve (r_4), **langs hvilken den forelagte Flade berøres af den omskrevne Keglefl ade af fjerde Orden** $[T(k_4)]$ **med Toppunkt** T **i en Kummersk Kegles Toppunkt, er beliggende paa 4 Keglefl ader af**

---

[1]) I det hele indeholder Fladen en firdobbelt Uendelighed af Rumkurver af 4de Orden første Art, bestemte ved dens Skjæring med Flader af anden Orden gjennem Dobbeltkeglesnittet. — Foruden den tredobbelte Uendelighed er der for T — som for andre Punkter i Rummet — en enkelt Uendelighed af Kurver af 4de Orden første Art paa Fladen, som to og to udskjæres af Kegler af anden Orden med Toppunkt i T. Disse Kegler ere dem, der ere omskrevne om Flader af anden Orden gjennem (r_4).

anden Orden, som berøre hver sin af de 4 andre Kummerske Kegler langs disses Røringsfrembringere med Tangentplaner fra T.

Endvidere:

Keglesnittene i to konjugerede Systemer ere paa 4 Maader forbundne til saadanne Par, som ligge paa Keglefiader med samme Toppunkter som de 4 Kummerske Kegler, som ikke berøres af Keglesnittenes Planer.

III. Realitetsegenskaber og Udseende studerede ved Projektion fra Punkter af Dobbeltkeglesnittet.

16. Hjælpesætninger om Udseendet af almindelige plane Kurver af fjerde Orden. Naar man bortser fra den forskjellige Stilling mod Planens uendelig fjerne rette Linie, faar man et fuldstændigt Overblik over Formerne af Kurver af fjerde Orden uden Dobbeltpunkter dels ved de tidligere bekjendte Sætninger, at Kurven ikke kan have mere end 4 Grene uden for hinanden, eller mere end to, af hvilke den ene ligger inden for den anden, dels ved den dertil føjede, at en Kurve af 4de Orden uden Dobbeltpunkter altid har 4 saadanne reelle Dobbelttangenter, som enten berøre samme Gren to Gange eller have imaginære Berøringspunkter[1]). Idet tillige to uden for hinanden liggende Grene af en Kurve af 4de Orden altid have 4 og kun 4 Fællestangenter, faar man følgende Hovedformer for disse Kurver:

I.	Kurver	med	4	Grene	uden for	hinanden og	28	reelle	Dobbtang.,
II.	—	—	3	—	—	—	16	—	—
III.	—	—	2	—	—	—	8	—	—
IV.	—	—	1	—	—	—	4	—	—
V.	—	—	0	—	—	—	4	—	—

VI. Kurver med 2 Gr. d. ene indenf. d. and. og 4 reelle Dobbtang.

---

[1]) Mine herhen hørende Arbejder findes i Tidsskrift for Mathematik 1873 og 1874, samt i Mathematische Annalen 7. Bd. Af min Hovedsætning i en noget ændret Skikkelse har Klein som bekjendt givet en yderst mærkelig Udvidelse til alle algebraiske Kurver.

Crone[1]) har nu hertil knyttet en Undersøgelse af Realiteten af de 63 Systemer af firdobbelt rørende Keglesnit og Fordelingen af Kurvens reelle og imaginære Dobbelttangenter paa disse. Blandt hans Resultater ville vi faa Brug for de efterstaaende Angivelser af reelle Systemer, der kaldes ydre eller indre, eftersom Keglesnittene ligge uden for eller inden for de reelle Grene (saaledes at dog den Del af Planen, som ligger inden for to Grene, betragtes som ydre). Vi angive kun Systemernes reelle sammensatte Keglesnit (Dobbelttangentpar), som kunne bestaa af to reelle eller to konjugeret imaginære („konjugerede") Linier; det, som disses Antal mangler i 6, maa udfyldes med Keglesnit sammensatte af ikke-konjugerede imaginære Dobbelttangenter. Romertallene svare til den oven for angivne Inddeling af Kurverne. Bogstaverne i anden Pille skulle ved senere Henvisninger betegne de forskjellige Arter Systemer.

Kurve.	Systemer.			Par Dobbelttangenter. i Systemet:		Reelle Dobbelttangenter foruden Systemets.
		Antal.	Beliggenhed.	reelle.	konjugerede.	
I.		63	ydre	6	0	16
II.	*a*	30	ydre	4	0	8
	b	1	indre	0	6	16
III.	*a*	1	ydre	4	2	0
	b	12	ydre	2	0	4
	c	2	indre	0	4	8
IV.	*a*	3	ydre	2	2	0
	b	1	ydre	0	0	4
	c	3	indre	0	2	4
V. og VI.	*a*	3	ydre	2	4	0
	b	12	indre	0	0	4

[1]) Se Tidsskrift for Mathematik 1875 og 1877, eller Mathematische Annalen 12. Bd. Om Rigtigheden af de af Crones Resultater, som vi ovenfor anføre for at bruge dem, kan man overbevise sig ved at betragte

Det kan tillige bemærkes, at for Kurverne II.—IV. ligger der inden for hver Gren 2 af de reelle Skjæringspunkter mellem de til hvert indre System hørende konjugerede Dobbelttangenter, og at Keglesnittene i Systemet III. *a* kunne kjendes derpaa, at Kurvens Grene enten begge ligge uden for eller begge inden for et saadant Keglesnit, og at enhver af Grenene berører det et lige Antal Gange.

17. Bestemmelse af reelle rette Linier paa og reelle Kummerske Kegler til en Flade af fjerde Orden med **Dobbeltkeglesnit med reelle Punkter.** Hvis vor Flades Dobbeltkeglesnit har reelle Punkter, kunne vi projicere Fladen fra et af disse *P*. Konturen vil da ifølge Nr. 2 kunne antage alle de i Nr. 16 angivne Former, og Sporet *T'* af Dobbeltkeglesnittets Tangent i *P* vil kunne være hvilket som helst reelt Skjæringspunkt mellem Dobbelttangenter. Ere disse reelle, er *P* et Punkt af en Skjæringslinie mellem reelle Dele af Fladen; ere de konjugerede, er det et Punkt af en isoleret Kurve. Disse forskjellige Dele af Dobbeltkeglesnittet ville vi kort betegne ved Ordene Skjæringskurven og den isolerede Kurve; hver kan bestaa af indtil 2 Stykker.

De sammensatte Keglesnit i samme System firdobbelt rørende Keglesnit som de to Dobbelttangenter gjennem *T'* ere ifølge Nr. 4 Konturerne af de 5 Kummerske Kegler. En saadan vil være reel (have reel Ligning og i det mindste reelt Toppunkt), naar dens Kontur er sammensat af to reelle eller konjugerede Dobbelttangenter. I første Tilfælde ligger Projektionscentret *P* uden for Keglen, i sidste kunne vi altid sige, at det ligger inden for Keglen, naar vi blot vedtage at sige, at

Nabokurver til Kurver med et Dobbeltpunkt. Forandringer i de angivne Tal kunne nemlig kun indtræde, naar Kurven faar et Dobbeltpunkt. For at faa alle saadanne Overgangstilfælde med, maa man erindre, at et reelt Dobbeltpunkt enten kan være et saadant, som sammenknytter to Grene, eller et isoleret Punkt, som da træder i en Grens Sted i Grænseværdierne for Antal af Grene, eller et Skjæringspunkt mellem to Grene af ulige Orden, foruden hvilke Kurven da højst har 1 Gren af lige Orden.

ethvert Punkt af Rummet ligger inden for en reel Kegle uden reelle Frembringere.

De øvrige Dobbelttangenter ere Projektioner af Fladens rette Linier. Antallene af reelle Kummerske Kegler og af reelle rette Linier blive saaledes bestemte. Midlerne til denne Bestemmelse haves i Nr. 16; men vi udsætte Angivelsen af Resultaterne til Nr. 20 for at medtage andre Egenskaber ved de enkelte Hovedformer.

18. Fladens Net og disses Typer. Konturens Form giver endvidere en Forestilling om Fladens Form. Konturen danner nemlig Overgangen mellem saadanne Punkter af Projektionsplanen, hvori to, og saadanne, hvori intet reelt Punkt af Fladen projiceres. Hvorledes disse to Dele ligge for Konturen, ses ved Betragtning af Sporet T' af Tangenten i P. Dette Punkt vil nemlig høre til den første eller anden Del af Planen, eftersom P er et Punkt af Skjæringskurven eller et Punkt af den isolerede Kurve.

I Beskrivelsen af Formerne af de forskjellige Net[1]), hvoraf Fladen kan bestaa, og til hvis Stilling med (mulige Deling ved) den uendelig fjerne Plan vi ikke tage noget særligt Hensyn, ville vi efter Klein[2]) kalde saadanne Net af lige Orden, som overhovedet ikke indeholde Kurvegrene af ulige Orden, (f. Ex. Ellipsoiden) Net af Typen Punkt, og saadanne Net af lige Orden, som indeholde Grene af ulige Orden, og som derfor skjære enhver Plan, (f. Ex. Hyperboloiden med et Net) Net af Typen ret Linie. Naar Fladen proji-

---

[1]) For at undgaa at lave Ord bruger jeg denne sædvanlige Oversættelse af det franske „nappe", uagtet den, foruden at være lidet betegnende, bliver særlig uheldig derved, at man i Geometrien har en naturligere Brug for Ordet Net, som svarende til det franske „réseau".

[2]) Se hans Afhandling: Ueber Flächen dritter Ordnung i 6te Bd. af Mathematische Annalen S. 577—581. Da Klein dog ikke paa det anførte Sted bruger selve Ordene „Typen Punkt" og „Typen ret Linie", har jeg dem formodentlig fra en mundtlig Meddelelse. De sigte til, at Nettene kunne omformes saaledes, at deres Punkter falde i et Punkt eller i en ret Linie. „Typen Plan" ɔ: Fladenet af ulige Orden, træffe vi ikke her.

ceres fra et Punkt af den isolerede Kurve, ville Projektionerne af deres forskjellige Net vise sig adskilte[1]), og et Net vil være af Typen Punkt, naar det ligger inden for nogen af Konturens Grene, men ellers af Typen ret Linie. Denne Bestemmelse, hvis Rigtighed er iøjnefaldende, vil strække til for alle Tilfælde, hvor Konturen indeholder reelle Punkter; thi vel kan man, naar man gaar ud fra en Projektion fra et Punkt P af en Flades Skjæringskurve, træffe paa Flader uden isoleret Kurve; men en saadan vil man da kunne opnaa ved en Forandring af den Linie gjennem T', hvori Dobbeltkeglesnittet projiceres, og denne Forandring har ikke nogen Indflydelse paa Fladens Type. Iøvrigt vil det heller ikke være vanskeligt at opnaa en direkte Bestemmelse af Fladens Sammensætning af Net, og disses Typer, naar den projiceres fra et Punkt af Skjæringskurven. Det vil nemlig da, naar Konturen har reelle Grene, være ét og samme Net, som to Gange gaar gjennem Projektionscentret P, og dette Net vil være af Typen Punkt, naar baade Grenene ligge i samme Par Topvinkler mellem Dobbelttangenterne gjennem T', og enhver af dem har et lige Antal Røringspunkter med Dobbelttangenterne, derimod af Typen ret Linie, naar disse Betingelser ikke begge ere opfyldte. Kun i dette sidste Tilfælde vil man nemlig i Projektionsplanen kunne konstruere Kurvegrene af ulige Orden, som ved Hjælp af Reglerne i Nr. 3, anvendte som i Nr. 4, vise sig at være Projektioner af Kurvegrene, der ikke gaa igjennem Projektionscentret, og som altsaa ogsaa selv blive af ulige Orden.

Tilbage staar det Tilfælde, hvor Konturen ikke har reelle Punkter, og hvor hvert Punkt af Projektionsplanen er Projektion af to Punkter af Fladen.

---

[1]) Ellers maatte der være Net, hvilke Projektionslinierne kun traf i ét Punkt, og som altsaa vare af ulige Orden. Disse vilde skjære hinanden i en Kurve af ulige Orden, som maatte udgjøre en Del af Dobbeltkeglesnittet; men vi betragte her ikke saadanne Grænse- eller Overgangstilfælde som det, hvor dette Keglesnit er sammensat af to rette Linier.

I dette Tilfælde er Fladen sammensat af to Net af Typen Punkt. Der existerer nemlig ikke paa Fladen nogen Forbindelse mellem de to Punkter, som falde sammen i P, og enhver Kurvegren af ulige Orden i Projektionsplanen vil være Projektion af en Kurvegren paa Fladen, som gaar et ulige Antal Gange gjennem P og altsaa bliver af lige Orden[1]).

19. Fladenettenes Sammenhæng. En fuldstændigere Forestilling om et Nets Form faar man derved, at dets Sammenhæng angives ved et Tal. Dette skal, som vist af Schläfli og Klein, være det dobbelte af Antallet af i sig selv tilbageløbende (umiddelbart eller gjennem Skjæringspunkter med den uendelig fjerne Plan) Kurver, som man kan tegne paa Nettet uden at dele det[2]). Ligger ved vor Fremstilling Projektionscentret P paa den isolerede Kurve, vil Sammenhængen af et Net være det dobbelte af Antallet af de indvendige Konturgrene, ɔ: de Grene af Konturen, uden for hvilke Projektionen af Nettets reelle Punkter befinde sig, idet de i sig selv tilbageløbende Kurver, som ikke dele Fladen, kunne være de i Projektionens Kontur projicerede

---

[1]) Den sidste Paastand kunde synes noget forhastet, da en vindskjæv Hyperboloides stereografiske Projektion netop synes at frembyde samme Egenskaber som her et Nets. Der er imidlertid den væsentlige Forskjel, at Hyperboloidens stereografiske Projektion indeholder to Punkter (Fundamentalpunkter), som ere Projektioner af rette Linier paa Fladen, og igjennem hvilke Projektioner af Kurver paa Fladen altsaa kunne gaa, uden at Kurverne gaa gjennem Projektionscentret. — Dette Exempel antyder nogle af de Modifikationer, som vore almindelige Diskussioner maatte undergaa i saadanne Grænsetilfælde, hvor Projektionscentret ligger paa en af Fladens rette Linier.

[2]) Schläfli's Bemærkninger herom findes i Borchardts Journal 76. Bd. S. 152 i Noten, Klein's paa det i anden Note til Nr. 18 citerede Sted samt i: Bemerkungen über den Zusammenhang der Flächen i Mathematische Annalen 7. Bd. — En Tore har f. Ex. Sammenhængen 2. Den deles vel ikke ved en Parallelcirkel og en Meridiancirkel; men kun den først tegnede af disse to Kurver løber tilbage i sig selv; den anden gaar derimod fra et Punkt af den først tegnede til Punktet paa den modsatte Side af denne. — En Hyperboloide med ét Net, hvis to Ender maa antages at hænge sammen gjennem Skjæringskurven med den uendelig fjerne Plan, faar samme Sammenhæng som Toren.

Kurvegrene (Grenene af den saakaldte „virkelige" Kontur). Denne Bestemmelse strækker til, af samme Grunde som den tilsvarende i 18, med Undtagelse af det samme Tilfælde som der, hvor vi fandt, at der gik to Net af lige Orden gjennem Projektionscentret; i dette Tilfælde ser man let af Fremstillingen, at de to Net have Sammenhængen 0.

Forøvrigt kan man let af en Sætning af Klein[1]) udlede at, naar vort Projektionscentrum er et Punkt af et Nets Skjæringskurve med sig selv, bliver Sammenhængen 2 mindre end det dobbelte af Antallet af de indvendige Konturgrene.

20. Inddeling af Flader af fjerde Orden med et Dobbeltkeglesnit med reelle Punkter. — For at faa alle Hovedformerne af de Flader, hvormed vi beskjæftige os, og til hvis fuldstændigere Beskrivelse vi nu have skaffet os Midler, behøver man ifølge 17 blot efterhaanden at betragte alle de i 16 angivne Former for Konturen og lade Sporene af Tangentplanerne i Projektionscentret P efterhaanden være et reelt eller konjugeret Dobbelttangentpar i alle de sammesteds opregnede Systemer, som indeholde saadanne. Derved vil samme Fladeform faas to Gange, nemlig dels som projiceret fra et Punkt af Skjæringskurven, dels som projiceret fra et Punkt af den isolerede Kurve. Der vil imidlertid, naar man af alle Fremstillinger udleder Antal af reelle rette Linier og reelle Kummerske Kegler og disses

[1]) Math. Annalen 7. Bd. S. 554. Nærværende Anvendelse af denne Sætning paa en Flade og dens Fremstilling paa en Dobbeltplan beror paa, at Fladen faar to Fundamentalpunkter i Projektionscentret. Vil man anvende den samme Sætning paa Fremstillingen af et Fladenet af ulige Orden paa en Dobbeltplan, maa man erindre, at et saadant Nets to Sider fortsætte hinanden. Fremstillingen paa en Dobbeltplan kan kun gjælde den ene af disse Sider (tilsammen vilde de kræve en firdobbelt Plan), og dennes Sammenhæng er 1 mindre end selve Fladens. Man faar da ved stereografisk Projektion af Nettet af ulige Orden af en Flade af 3die Orden, at Sammenhængen af dettes ene Side er 1 mindre end det dobbelte Antal af Konturgrenene, hvorved Nettet selv faar den af Klein angivne Sammenhæng 8, 6, 4 eller 2.

Beliggenhed mod Skjæringskurven og den isolerede Kurve, aldrig fremkomme nogen Tvetydighed i Afgjørelsen af det Spørgsmaal, hvilke Fremstillinger der tilhøre samme Fladeform, saafremt man blot ikke betragter de Former af Konturen, som vi i 16 have kaldt V og VI (Kurver uden reelle Grene, Ringkurver) som væsentlig forskjellige.

Ved Opregningen af Fladernes Hovedformer angive de i Klammer opførte Romertal med tilføjet Bogstav Konturens Form og det System, hvortil de to som Tangentplanspor benyttede Dobbelttangenter høre; det første angiver dette for et Projektionscentrum paa Skjæringskurven, det sidste for et Projektionscentrum paa den isolerede Kurve.

Beliggenheden af Dobbeltkeglesnittet spiller, hvad vi allerede have benyttet, ingen væsentlig Rolle ved vor Inddeling i Hovedformer; men den giver Anledning til væsentlige Modifikationer inden for disse, som dog alle ere lette at forestille sig. — Idet alle Kummerske Kegler gaa gjennem Tilbagegangspunkterne (0, 2 eller 4 reelle)[1]), som skille Skjæringskurven fra den isolerede Kurve, vil Angivelsen af, at denne sidste ligger inden for eller uden for en Kummersk Kegle, indeholde den modsatte Angivelse om Skjæringskurven. Denne Angivelsesmaade ville vi ogsaa lade gjælde for Flader, hvor den isolerede Kurve mangler.

A. [I; II *b*] Flader med 16 reelle rette Linier og 5 reelle Kummerske Kegler, og som bestaa af et Net af Typen ret Linie og med Sammenhængen 6. Den isolerede Kurve ligger inden for alle de Kummerske Kegler.

B. [II *a*; III *c*] Flader med 8 reelle rette Linier og 3 reelle Kummerske Kegler, og som bestaa af et Net af Typen ret Linie og med Sammenhængen 4. Den isolerede Kurve ligger inden for alle de Kummerske Kegler.

---

[1]) Vi opføre overhovedet ikke Overgangstilfælde, derfor heller ikke nu saadanne, hvor 2 Tilbagegangspunkter falde sammen.

C. [III *b*; IV *c*]. Flader med 4 reelle rette Linier og 1 reel Kummersk Kegle, og som bestaa af et Net af Typen ret Linie og med Sammenhængen 2. Den isolerede Kurve ligger inden for den Kummerske Kegle.

Fladerne af Formerne *A*, *B* og *C* have 4, 2 eller 0 Tilbagegangspunkter; i sidste Tilfælde er det den isolerede Kurve, som mangler.

D. [III *a*; V eller VI *a*]. Flader uden reelle rette Linier og med 5 reelle Kummerske Kegler, og som enten bestaa af et Net af Typen Punkt og Sammenhængen 2 (ringformigt) eller ikke indeholde reelle Punkter — bortset fra den isolerede Kurve, som jo heller ikke er taget med i Beskrivelsen af de øvige Fladeformers reelle Net. — Den isolerede Kurve ligger inden for 3 og uden for 2 Kummerske Kegler. Naar Fladen har et reelt Net, kan der være 4, 2 eller 0 Tilbagegangspunkter, og i sidste Tilfælde kan det enten være Skjæringskurven eller den isolerede Kurve, som mangler; har Fladen intet reelt Net, er selvfølgelig hele Dobbeltkurven isoleret.

E. [V eller VI *a*; III *a*]. Flader uden reelle rette Linier og med 5 reelle Kummerske Kegler, og som bestaa af to Net af Typen Punkt og Sammenhængen 0. Den isolerede Kurve ligger inden i 1 og uden for 4 Kummerske Kegler. Dobbeltkurven kan enten være Skjæringskurve mellem de to Net, i hvilket Tilfælde den isolerede Kurve mangler, [Kontur V], eller bestaa af 1 eller 2 Stykker Skjæringskurve af et Net med sig selv og henholdsvis 0 - 1 eller 2 Stykker isoleret Kurve, eller endelig være isoleret Kurve.

F. [IV *a*; IV *a*]. Flader uden reelle rette Linier og med 3 reelle Kummerske Kegler, og som bestaa af et Net af Typen Punkt og med Sammenhængen 0. Den isolerede Kurve ligger inden i 1 og uden for 2 Kummerske Kegler. Der er 4, 2 eller 0 Tilbagegangs-

punkter; i sidste Tilfælde kan det enten være Skjæringskurven eller den isolerede Kurve, som mangler.

21. Reelle Keglesnitssystemer; forskjellige Slags imaginære rette Linier paa Fladen. En imaginær ret Linie i Rummet kan som bekjendt enten være en saadan, som har et reelt Punkt, hvori den da skjærer den konjugerede Linie, med hvilken den ogsaa ligger i en reel Plan, eller en saadan, som hverken har noget reelt Punkt eller nogen reel Plan; i dette sidste Tilfælde bestemmes den og den konjugerede Linie ved to Par konjugeret imaginære Punkter paa to rette Linier, som ikke skjære hinanden.

Antallene af Fladeformernes imaginære rette Linier findes ved at trække Antallene af de reelle fra 16. De blandt de imaginære Linier, som have reelt Punkt findes derved, at en saadan tilligemed den konjugerede maa ligge i en Tangentplan til en Kummersk Kegle, der maa være reel, da samme Plan ellers ogsaa skulde berøre den konjugerede imaginære Kegle. De to konjugerede imaginære Linier høre saaledes til et af de to Systemer Keglesnit paa Fladen, som ligge i Tangentplanerne til denne Kummerske Kegle, og hvis Projektioner, ifølge Nr. 6, ere de firdobbelt rørende Systemer til Konturen, som bestemmes ved dertil hørende Keglesnit sammensatte af et Spor af en Tangentplan i Projektionscentret og en Konturlinie til den Kummerske Kegle.

Et saadant System bliver nu reelt, naar de to Spor og de to Konturlinier enten alle ere reelle eller danne to konjugerede Par, og kun da. Heraf slutter man, at Tangentplanerne til en Kummersk Kegle skjære Fladen i reelle eller imaginære Keglesnit, eftersom den isolererede Kurve ligger inden for eller uden for Keglen (Skjæringskurven omvendt). Idet Keglesnittene i et imaginært System kun kunne indeholde enkelte reelle Punkter, faa vi nu en bedre Bestemmelse end tidligere af de forskjellige Kummerske Kegler. I Stedet for at sige, at den isolerede Kurve — der helt kunde mangle — ligger inden for eller uden for en Kummersk Kegle, kunne vi nu sige, at Fladens reelle Net — der jo rigtignok for

Fladeformen *D* ogsaa helt kunde mangle — ligge uden for eller inden for samme Kegle. Ifølge 20 vil da det reelle Net af Fladerne *A*, *B*, *C* ligge uden for alle Kummerske Kegler; det reelle Net af *D* — for saa vidt den har noget — ligger uden for 3 og inden for 2 Kummerske Kegler; de 2 Net af *E* ligge uden for 1 og inden for 4 Kummerske Kegler, og det reelle Net af *F* ligger uden for 1 og inden for 2 Kummerske Kegler. Vi maa dog (se Nr. 17), naar disse Angivelser skulle være fuldstændige, sige, at Fladens reelle Net ligge inden for reelle Kegler uden reelle Frembringere. Den isolerede Kurve (som skulde ligge uden for disse) maa da mangle. Mangle derimod Fladens reelle Net (*D*), kan efter vore nuværende Forudsætninger den isolerede Kurve ikke mangle, og det bliver da mellem de 3 Kegler, inden for hvilke den isolerede Kurve ligger, at der kan være saadanne, som mangle reelle Frembringere.

De reelle Keglesnitssystemer, som man finder i Tangentplanerne til de Kegler, uden for hvilke Fladens Net ligge, undersøges ved Hjælp af deres Projektioner, hvis Beskaffenhed kan udledes af de dem bestemmende sammensatte Keglesnit ved Hjælp af Regler, som findes i Crones Afhandling. Da man imidlertid i Valget af Projektionscentret, paa Skjæringskurven eller den isolerede Kurve, samt i det allerede vundne Kjendskab til Fladens reelle Linier har overflødige Midler til sin Raadighed, kan man undgaa al Tvetydighed, idet man blot nøjes med de i Nr. 16 citerede Resultater. Ved vor Angivelse af Keglesnitssystemerne paa de forskjellige Fladeformer skulle vi betegne disse og angive Beskaffenheden af Projektionerne af de paa dem liggende Keglesnitssystemer som i Nr. 20.

A. 10 reelle Keglesnitssystemer, hvert med 4 Par reelle rette Linier [I; II *a*].

B. 6 reelle Keglesnitssystemer, hvert indeholdende 2 Par reelle og ingen konjugerede rette Linier [II *a*; III *b*]. Ingen af Fladens 8 imaginære rette Linier har reelt Punkt.

C. 2 reelle Keglesnitssystemer, hvoraf det ene indeholder 2 Par reelle og 2 Par konjugerede rette Linier [III *a*; IV *a*],

medens det andet hverken indeholder reelle eller konjugerede rette Linier [III *b*; IV *b*]. Af de 12 imaginære Linier have de 4 reelt Punkt, de 8 ikke.

D. 6 reelle Keglesnitssystemer, som hverken indeholde reelle eller konjugerede rette Linier [III *b*; V *b* eller VI *b*], ja som helt kunne savne Keglesnit med reelle Punkter (V *b*). Ingen af Fladens rette Linier har noget reelt Punkt. — Har Fladen ikke reelle Punkter, bliver Forskjellen mellem reelle Tangentplaner til de 3 eller 2 Kegler, uden eller inden for hvilke Fladen bestandig kan siges at ligge, at en af de første skjærer Fladen i to reelle Keglesnit uden reelle Punkter, medens en af de sidste skjærer den i et Par konjugerede imaginære Keglesnit (Se nærmere herom i Nr. 23).

E. 2 reelle Keglesnitssystemer, hvert indeholdende 4 Par konjugerede rette Linier [V eller VI *a*; III *c*]. Alle 16 imaginære rette Linier have reelt Punkt.

F. 2 reelle Keglesnitssystemer, hvert med 2 Par konjugerede rette Linier [IV *a*; IV *c*]. 8 imaginære rette Linier have reelt Punkt, 8 ikke.

IV. Realitetsegenskaber og Udseende studerede ved Hjælp af en Kummersk Kegle.

22. Hjælpesætninger om Rumkurver af fjerde Orden første Art. Skjæringskurven mellem Fladerne af anden Orden i et Bundt har højst 2 Grene. Vi faa derved følgende Hovedformer:

1) Kurven bestaar af 2 Grene af lige Orden. De 4 Kegleflader ($\varkappa_2$), som gaa igjennem den, ere da alle reelle.

α. En Flade i Bundtet, hvis Punkter dels ligge uden for alle, dels inden for alle Keglerne ($\varkappa_2$), har reelle retliniede Frembringere, som kunne skjære en Gren i 2 eller 0 Punkter. Overgangen gjøres af berørende Frembringere: hver Gren berører 2 Frembringere i hver Frembringerrække.

β. En Flade i Bundtet, hvis Punkter dels ligge uden for 3 og inden for 1 Kegle ($\varkappa_2$), dels omvendt, har imaginære Frembringere.

γ. En Flade i Bundtet, hvis Punkter ligge inden for 2 og uden for 2 Kegler ($\varkappa_2$), har reelle Frembringere, der alle skjære hver at Grenene i ét Punkt og følgelig aldrig røre dem.

2) Kurven bestaar af 1 Gren af lige Orden. 2 af de Keglefladeer, som gaa igjennem den, ere da reelle.

α. En Flade i Bundtet, hvis Punkter ligge uden og inden for begge Kegler ($\varkappa_2$), har reelle Frembringere, som skjære Grenen i 2 eller 0 Punkter; 2 af hver Frembringelse røre den.

β. En Flade i Bundtet, hvis Punkter ligger uden for 1 og inden for 1 Kegle, har imaginære Frembringere.

3) Kurven bestaar af 2 Grene af ulige Orden. Ingen af Keglerne ($\varkappa_2$) er reel. — En Flade i Bundtet har da altid reelle Frembringere. Frembringerne i den ene Række skjære hver Gren i et Punkt; Frembringerne i den anden kunne skjære en Gren i 2 eller 0 Punkter, og hver Gren berører 2, som ligge i hver sin af de Dele, hvori Kurven deler Fladen.

4) Kurven har ingen reelle Grene. Alle 4 Kegler ($\varkappa_2$) ere da reelle; 2 af dem have reelle Frembringere, 2 ikke. Vi betragte — som alt angivet — ethvert reelt Punkt af Rummet som liggende inden for enhver af disse sidste. Da de 2 første ikke have reelle Skjæringspunkter, kan et Punkt ikke ligge inden for dem begge.

α. En Flade i Bundtet med reelle Punkter, som ligge uden for 2 og inden for 2 Kegler, har reelle Frembringere.

β. En Flade i Bundtet, hvis reelle Punkter ligge inden for 3 Kegler, har imaginære Frembringere.

γ. Bundtet indeholder ogsaa reelle Flader uden reelle Punkter, hvis Frembringere maa være imaginære Linier uden reelt Punkt. (De tidligere omtalte imaginære Frembringere have stedse været imaginære Linier med reelt Punkt).

En Del af disse Sætninger, som vi her skulle anvende, turde være bekjendte. De øvrige fremgaa ved Figurbetragtning ved dels at forfølge de to Rækker Flader, som paa en saadan Maade kunne danne kontinuerte Overgange mellem to givne, at de alle høre til samme Bundt, dels at betragte de

forskjellige Stillinger, som Frembringerne i en enkelt Flade — eller Planerne i et Bundt med en Tangent til Rumkurven til Axe — kunne indtage mod Rumkurvens Grene. Da jeg haaber andetsteds at komme udførligere ind herpaa, skal jeg nu ikke dvæle derved.

Det ses tillige, at Rumkurven, hvis den har reelle Punkter, deler enhver Flade i Bundtet i 2 Dele beliggende hver paa sin Side af enhver anden Flade i Bundtet. I Tilfældene 1 α og β bestaar den ene Del af to adskilte Stykker. — Har Rumkurven ikke reelle Punkter kunne vi tænke os en lignende Deling eller tale, som om den existerede. Kun kommer det ene af de to Stykker, saaledes i 4 α det, som ligger uden for begge Kegler med imaginære, og inden for begge Kegler med reelle Frembringere, da ikke til at indeholde reelle Punkter. Da man fremdeles i Bundtet 4 kommer til Fladerne uden reelle Punkter (4 γ) ved fra 4 β at passere en af de 2 Kegler med imaginære Frembringere, maa man betragte Fladerne 4 γ som beliggende inden for 2 Kegler, af hvilke den ene har reelle, den anden imaginære Frembringere, og uden for de to andre. Delingen ved Rumkurven kan ogsaa tænkes at finde Sted her, men hverken den ene eller den anden Del indeholder reelle Punkter.

23. Anvendelse af Konstruktionen i Nr. 13 til Undersøgelse af de forskjellige Fladeformer. Ifølge Nr. 13 og 14 afbildes Punkterne af den Flade, vi undersøge, to og to i Punkterne S af en Flade af anden Orden (σ_2). Idet T er et fast Punkt i Rummet, ligge de i S afbildede Punkter M_1 og M_2 paa TS og ere Dobbeltpunkter i den Involution, hvortil TS og Skjæringspunkterne DD' med en anden Flade af anden Orden (δ_2) høre. De ere reelle eller imaginære, eftersom T og S ikke skille eller skille D og D'. Ere de da for en Stilling af S reelle, blive de imaginære, naar S, bevægende sig paa (σ_2), en Gang passerer Skjæringskurven (r_4) mellem (σ_2) og (δ_2), og omvendt. De Dele af (σ_2), hvis Punkter S give reelle Punkter M, ville blive til saadanne, hvis Punkter S give imaginære M, og omvendt, naar (δ_2), medens (σ_2), (r_4) og T blive faste, varierer i Bundtet af Flader gjennem (r_4) og da

passerer enten (σ_2) eller den Flade i Bundtet, som gaar gjennem T. Altsaa: Naar Fladen (σ_2) og Rumkurven (r_4) ere givne, kan en hvilken som helst af de to Dele, hvori (r_4) deler (σ_2), indeholde Billederne af de reelle Punkter af en Flade af fjerde Orden med Dobbeltkeglesnit; indeholder (r_4) ikke reelle Punkter, maa alle (σ_2)'s reelle Punkter enten være Billeder af lutter reelle eller af lutter imaginære Punkter. I sidste Tilfælde og i det, hvor (σ_2) selv ikke indeholder reelle Punkter, indeholder den fremstillede Flade heller ikke saadanne.

En reel Frembringer i (σ_2) er ifølge Nr. 14 Billedet af et Keglesnit paa Fladen, som ligger i en Tangentplan til den Kummerske Kegle, som har Toppunkt i T og er omskreven om (σ_2). Dette Keglesnit er reelt, selv om det ikke indeholder reelle Punkter, og Fladen ligger da (se Nr. 21) uden for den Kummerske Kegle. Ere Frembringerne i (σ_2) derimod imaginære med reelt Punkt, vil enhver Tangentplan til den Kummerske Kegle skjære Fladen i to imaginære Keglesnit, og Fladen ligger altsaa inden for denne Kegle. Slaa vi fra disse Tilfælde fast, at Fladen ligger paa samme Side af Keglen som Linier fra T, der skjære (σ_2) i reelle Punkter, og paa modsat Side af dem, der skjære (σ_2) i imaginære Punkter, og erindre vi, at ethvert reelt Punkt ligger inden for en Kegle med imaginære Frembringere, maa vi i det Tilfælde, hvor (σ_2) ikke har reelle Punkter, sige, at Fladen, der da heller ikke har reelle Punkter, ligger uden for den Kummerske Kegle.

Berører en reel Frembringer i (σ_2) Rumkurven (r_4), vil det tilsvarende Keglesnit ifølge Nr. 14 være sammensat af to rette Linier, som skjære hinanden i det reelle Røringspunkt med (r_4). De to Linier ville være reelle eller imaginære med det nævnte reelle Punkt, eftersom den Del af (σ_2), hvor Frembringeren ligger, fremstiller reelle eller imaginære Punkter. Til Afgjørelse heraf indeholder Nr. 22 det fornødne, idet en Tangent til Rumkurven paa Røringspunktet nær ligger uden for de Kegler, som gaa gjennem Kurven.

De 4 Kummerske Kegler, som høre til Fladen foruden den med Toppunktet i T, ere ifølge Nr. 15 reelle eller imagi-

nære sammen med de 4 Keglefläder ($\varkappa_2$) gjennem (r_4). Ere M_1 og M_2 reelle Punkter af Fladen, som afbildes i et Punkt S af (σ_2), vil en Tangentplan fra M_1 til en af de 4 Kummerske Kegler og en (dermed bestemt) Tangentplan fra M_2 til samme Kegle skjære Fladen i Kurver, hvis tilsvarende Punkter ligge i en Tangentplan fra S til den Kegle ($\varkappa_2$), som har samme Toppunkt. Eftersom denne Tangentplan er reel eller imaginær, ville Tangentplanerne fra M_1 og M_2 til den Kummerske Kegle ogsaa være det. Punkterne M_1 og M_2 ligge altsaa uden eller inden for den Kummerske Kegle, eftersom det tilsvarende Punkt S ligger uden eller inden for ($\varkappa_2$). Denne Bestemmelse kan overføres paa det Tilfælde, hvor den undersøgte Flade slet ikke har reelle Punkter, idet man ved Reglerne i Nr. 22 ogsaa da kan angive Beliggenheden af de (ikke existerende) Punkter af (σ_2), som give reelle Punkter M. At man derved kommer til Resultater stemmende med, hvad der nys er fastsat om Betegnelsen af en saadan Flades Beliggenhed mod en Kummersk Kegle, ses ved at lade disse faa Tilfælde fremgaa af andre ved kontinuerte Overgange[1]).

Vi ere herved i Stand til, idet vi danne efterstaaende Skema over de forskjellige, efter Nr. 22 angivne, Former for (r_4) og (σ_2) og Beliggenheden af de Punkter af samme, hvor der afbildes reelle Punkter, dertil at knytte et Skema over de forskjellige Antal af reelle Kummerske Kegler og rette Linier, samt konjugerede imaginære rette Linier med reelt Punkt, og da vi altid vide, at mindst én af de 5 Kummerske Kegler til en reel Flade er reel, faa vi nu **alle** Former af den undersøgte Flade med.

Det vil da, idet Inddelingen i Hovedformer grundes paa de her nævnte Realitetsspørgsmaal, vise sig, at vi ikke faa andre Hovedformer end foran, hvor Dobbeltkeglesnittet forudsattes at have reelle Punkter, om der end inden for en af

---

[1]) Da Linien fra T til Toppunktet i en Kegle ($\varkappa_2$) har samme Stilling mod den Kummerske Kegle med samme Toppunkt som mod ($\varkappa_2$), er det tilstrækkeligt at undersøge Skjæringen mellem denne Linie og den til den nye Kummerske Kegle svarende Flade (σ_2).

Hovedformerne vil forekomme en ny Varietet, som kun er mulig, naar Dobbeltkeglesnittet ikke har reelle Punkter.

Paa Skemaet ville disse Angivelser træde tilstrækkelig tydeligt frem. Første Pille efter Løbenumrene indeholder Henvisning til de i Nr. 22 beskrevne Former for (r_4) og (σ_2). Angivelsen $r + 1$ af Antal af Kummerske Kegler, uden eller inden for hvilke den fremstillede Flade ligger, betegner, at der er r saadanne foruden den, der er benyttet ved Afbildningen. At Fladen ligger uden eller inden for denne, er tillige betegnet ved Tilføjelse af (u.) eller (i.) til Fladeformens i Nr. 20 indførte Navn, som findes i sidste Pille. — Næst- og tredie-sidste Pille indeholde Antal af Liniepar i Tangentplanerne til den benyttede Kummerske Kegle. Disse Liniepars Fordeling paa de to til Keglen hørende Keglesnitssystemer er angivet ved Betegnelsen $(a + b)$.

	Afbildning.					Fremstillede Flade.				
	Se Nr. 22.	Grene af (r_4) og deres Orden.	Kegler $(\varkappa_2)$. Afbildn. af reelle Punkter ligger		Frembringere i (σ_2).	Kummerske Kegler. Fladen ligger		Berørende Liniepar		Fladens Form.
			uden for:	inden for:		uden for:	inden for:	reelle.	konjugerede.	
1	1 α	2 lige	4	0	reelle	4 + 1	0	4 + 4	0	*A* (u.)
2	1 β	2 lige	3	1	imagin.	3	1 + 1	0	0	*D* (i.)
3	1 γ	2 lige	2	2	reelle	2 + 1	2	0	0	*D* (u.)
4	1 β	2 lige	1	3	imagin.	1	3 + 1	0	0	*E* (i.)
5	1 α	2 lige	0	4	reelle	0 + 1	4	0	4 + 4	*E* (u.)
6	2 α	1 lige	2	0	reelle	2 + 1	0	2 + 2	0	*B* (u.)
7	2 β	1 lige	1	1	imagin.	1	1 + 1	0	0	*F* (i.)
8	2 α	1 lige	0	2	reelle	0 + 1	2	0	2 + 2	*F* (u.)
9	3	2 ulige	0	0	reelle	0 + 1	0	2 + 0	2 + 0	*C* (u.)
10	4 β	0	(3)	(1)	imagin.	3	1 + 1	0	0	*D* (i.)
11	4 α 4 γ	0	2	2	reelle, imag. u. reelt P.	2 + 1	2	0	0	*D* (u.)
12	4 β	0	1	3	imagin.	1	3 + 1	0	0	*E* (i.)

Parentheserne om Keglerne $(\varkappa_2)$'s Antal i 10 tilkjendegive, at disse, som umiddelbart betegne en Beliggenhed, som reelle Punkter ikke kunne have, udtrykke, at Fladen (σ_2) ligger inden for 3 og uden for 1 Kegle og kun fremstiller imaginære Punkter. Den fremstillede Flade vil henhøre under den Form af D, som ikke har reelle Punkter. — 11 indeholder en samtidig Fremstilling (se Nr. 22) af 3 Tilfælde, idet (σ_2) kan faa reelle Punkter (4 α), hvori fremstilles reelle Punkter, reelle Punkter (4 α), hvori fremstilles imaginære Punkter, eller endelig (4 γ) kun imaginære Punkter. I det første faas Formen D med reelle Punkter, i de to sidste Formen D uden reelle Punkter; i de to første har den benyttede Kummerske Kegle reelle Frembringere, i det sidste ikke. — For øvrigt ses det, at Bestemmelserne under 10, 11, 12, hvor (r_4) ikke har reelle Grene, falde helt sammen med dem under 2, 3, 4, hvor den har to reelle Grene.

24. Typen og Sammenhængen af Fladens Net. Naar man ved vor Afbildning fastholder, at (se Nr. 14) de to Punkter M_1 og M_2, som afbildes i samme Punkt S, afbildes paa hver sin Side af (σ_2), at disse to Sider ere forbundne langs (r_4) og vexle langs Røringslinien for den omskrevne Kegle til (σ_2) med Toppunkt i Projektionscentret T, bliver Afbildningen entydig og giver derved Overblik over Beskaffenheden af den afbildede Flades Net. En Kurvegren og dens Afbildning skjæres i lige mange Punkter af Planer gjennem Projektionscentret T; de blive saaledes begge af lige eller begge af ulige Orden. For at undersøge, om et Net har Typen ret Linie, behøver man da blot at undersøge, om der paa dens Billede kan tegnes i sig selv tilbageløbende Kurvegrene af ulige Orden.

Ved paa denne Maade at undersøge alle de paa Skemaet angivne Hovedformer for Afbildningen kommer man meget let til de i Nr. 20 angivne Resultater om Antal af Net samt deres Typer. Det vil være tilstrækkeligt som Exempel at betragte Skemaets Nr. 11 i det Tilfælde, hvor hele (σ_2) afbilder reelle Punkter. Billedet faar da kun ét sammenhængende Net; thi naar man bevæger sig paa den ene Side af (σ_2), vil man vel,

idet man passerer den uendelig fjerne Plan, blive paa samme Side; men idet man passerer Røringslinien for Tangentkeglen fra T, gaar man over fra den ene Side til den anden. De to Sider ere saaledes forbundne. Tegner man nu paa (σ_2) en Kurvegren af ulige Orden, vil denne skjære den nævnte Røringslinie i et ulige Antal Punkter. Ved at gjennemløbe denne Gren fuldstændigt en Gang, begyndende paa den ene Side af (σ_2) og følgende nys nævnte Regel for Afbildningen, kommer man ikke til sit Udgangspunkt, men kun til Punktet paa den modsatte Side af (σ_2). Man maa da gjennemløbe denne eller en anden Gren af ulige Orden paa (σ_2) endnu en Gang for at komme tilbage; men da har man i det hele gjennemløbet en Gren af lige Orden. Nettet har altsaa Typen Punkt.

Vor entydige Afbildning maa fremdeles have samme Sammenhæng som den afbildede Flade. Billedets Sammenhæng er overalt meget let overskuelig, og Resultaterne bliver de samme som angivet i Nr. 20. I det nys nævnte Exempel ses det f. Ex., at man uden at dele Billedet paa Fladens ene Side kan lægge en i sig selv tilbageløbende Kurve, men at nye Kurver, der løbe tilbage i sig selv, dele den. Sammenhængen bliver saaledes 2.

25. Variation i Beliggenheden af T eller Fladen (ϑ_2). De i Nr. 23 og 24 angivne Egenskaber afhænge kun af Formen af (r_4) og (σ_2) og Valget af den Del af (σ_2), hvori der afbildes reelle Punkter. Dette sidste Valg staar som angivet i Nr. 23 i Forbindelse med Beliggenheden af T og (ϑ_2); men anden Indflydelse har denne Beliggenhed ikke havt paa vor Hovedinddeling.

Beliggenheden af Punktet T alene kan da, naar man forbeholder sig passende Valg af (ϑ_2), endnu vælges fuldkommen frit, uden at dette faar nogen Indflydelse paa, til hvilken Hovedform den fremstillede Flade kommer til at høre. Har (σ_2) reelle Frembringere, bliver det samme for alle Beliggenheder af T Tilfældet med den omskrevne Kegle fra T ɔ: med den ved Afbildningen benyttede Kummerske Kegle. Har (σ_2) lutter imaginære Punkter, vil derimod for alle Belig-

genheder af T den Kummerske Kegle faa imaginære Frembringere. En Kegle, uden for hvilken Fladen ligger, kan altsaa kun i det Tilfælde, hvor Fladen ikke har noget reelt Net, faa lutter imaginære Frembringere (Skemaets 11, 3die i Nr. 23 omtalte Tilfælde). — Har (σ_2) imaginære Frembringere med reelt Punkt, kan T ligge uden eller inden for denne Flade; en Kummersk Kegle, inden for hvilken Fladen ligger, kan saaledes have reelle eller lutter imaginære Frembringere. Det sidste kan ogsaa finde Sted, naar Fladen D ikke har noget reelt Net, dog kun, naar Dobbeltkeglesnittet heller ikke har reelle Punkter. (Se Nr. 21).

Frembringerne gjennem T i den Flade i Bundtet gjennem (r_4), som gaar gjennem T, berøre den fremstillede Flade i deres Skjæringspunkter med (r_4) og blive altsaa de to Dobbelttangenter gjennem T, som ikke ere Frembringere i den Kummerske Kegle. Disse blive ifølge Nr. 22 reelle eller imaginære, eftersom T ligger inden for et lige eller ulige Antal af Keglerne $(\varkappa_2)$ gjennem (r_4), altsaa paa Grund af disse Keglers Stilling mod de 4 øvrige Kummerske Kegler (se Nr. 15), eftersom T ligger inden for et lige eller ulige Antal af disse. — Efter T's Beliggenhed for de øvrige Kummerske Kegler, kan der endnu gives Regler om Realiteten af de to Dobbelttangenters Røringspunkter. Disse ville imidlertid være saa umiddelbare Omskrivninger af Regler for Realiteten af (r_4)'s Skjæringspunkter med dens reelle Dobbeltsekanter, at der ikke er Grund til at dvæle derved. Som Exempel kunne vi anføre, at de to Dobbelttangenter til Fladen C fra Toppunktet i dens Kummerske Kegle ere reelle, og at mindst den ene har reelle Røringspunkter.

Om Dobbeltkeglesnittet faar reelle Punkter eller ej, beror paa Beliggenheden af Fladen (δ_2) inden for det den — for hver enkelt Hovedform — anviste Spillerum med (σ_2) og Fladen gjennem T til Grænser. Dobbeltkeglesnittet var jo nemlig Røringslinien for den omskrevne Kegle fra T til (δ_2). Man finder, at Dobbeltkeglesnittet paa Fladerne A, B, C, altid har reelle Punkter, hvad der allerede følger af den Omstændighed, at disses Net har Typen ret Linie og altsaa altid

maa skjære Dobbeltkeglesnittets Plan. Fladerne D, E, F kunne derimod faa Dobbeltkeglesnit uden reelle Punkter. Blandt disse vil der under E endog optræde en Form, som vi ikke have truffen blandt de Flader, hvis Dobbeltkeglesnit havde reelle Punkter, nemlig en saadan, af hvis 2 Net det ene ligger helt inden for det andet. Denne Fladeform fremkommer, som henført til en af de Kummerske Kegler, „inden for“ hvilke den ligger, under Skemaets Nr. 12, naar T ligger inden for (σ_2), og (δ_2) enten har imaginære Frembringere med reelt Punkt og omslutter (σ_2), eller imaginære Frembringere uden reelt Punkt. Vedkommende Kummerske Kegle har imaginære Frembringere[1].

---

[2]) De Former, som man finder, naar Dobbeltkeglesnittet ikke har reelle Punkter, afvige, som de skulle, kun ved ikke projektiviske Egenskaber fra Formerne af Cyklider, som beskrives af Darboux i det citerede Værk S. 128—131. Afvigelsen i Angivelsen af Sammenhæng ved Tal beror kun paa en forskjellig Betegnelsesmaade.

